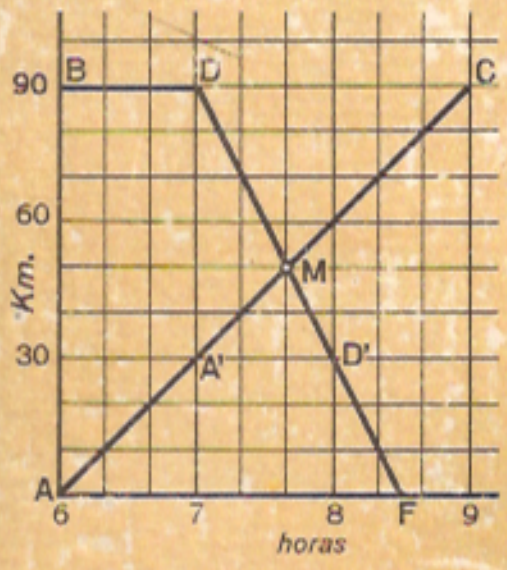
13 jul. 1964 - B. O. M. E. 23 jul. 1964



MATEMÁTICAS

TERCER CURSO

EDELVIVES

54 ptas.

MATEMÁTICAS

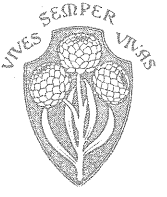
TERCER CURSO

MATEMÁTICAS

TERCER CURSO

POR

EDELVIVES



Aprobado por O. M. del 13-VII-1964
«B. O. M. de E. N.», núm. 59, del 23-VII-1964
Año de publicación: 1965 — Precio: 54 ptas.

EDITORIAL LUIS VIVES, S. A.
Zaragoza

© *Editorial Luis Vives, S.A., Zaragoza 1965*

N.° Registro: 1.207 - 62

ES PROPIEDAD DEPÓSITO LEGAL Z. 257 - 59 PRINTED IN SPAIN

EDITORIAL LUIS VIVES, S.A., P.° Fernando el Católico, 63 - Zaragoza

A L G E B R A

1. Los números negativos

1. Número natural. — Vimos en los cursos anteriores que el número natural expresa las unidades que contiene un conjunto de elementos. Así, cuando decimos seis cuadernos, treinta y cinco mesas, ciento veinte pesetas; 6, 35 y 120 son números naturales.

El número natural se obtiene también como resultado de medir una cantidad. Por ejemplo al medir la capacidad de un depósito, si contiene exactamente 830 veces la unidad, el litro, diremos que la capacidad del depósito es de 830 litros; y 830 el número natural.

El número natural simboliza una propiedad común a todos los conjuntos coordinables entre sí: la de contener el mismo número de veces el elemento que se toma como unidad.

2. Magnitudes absolutas y magnitudes relativas. — Como acabamos de indicar, los números sirven para representar las cantidades; de tal manera que, dando el número y la unidad, se puede reproducir la cantidad.

Por ejemplo, cuando una persona pide en la tienda 6 kilogramos de arroz o 5 litros de aceite expresa el número y la unidad empleada, con lo que el comerciante puede servir la cantidad de arroz o de aceite que el comprador solicita.

Esto ocurre con las magnitudes llamadas *absolutas*.

Pero existen ciertas magnitudes, las denominadas *relativas*, en las que pueden considerarse dos maneras de ser distintas. En ellas, para determinar cada cantidad, se necesita, además del número y la unidad empleada, un nuevo dato, que es el *sentido*.

EJEMPLOS. — Si me dicen que un punto A situado en una recta $X'X$ (fig. 1), dista tres centímetros de otro O, no poseo aún datos suficientes para determinar la posición del mismo; me deberán añadir si se encuentra a la derecha o a la izquierda de O.

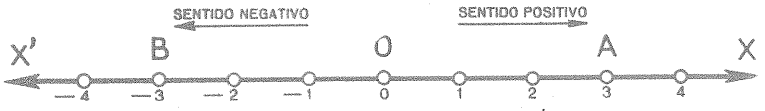


FIG. 1

Al expresar la fecha de un suceso, no es suficiente indicar el número de años que le separa del principio de la era cristiana; es preciso añadir si fue *anterior* o *posterior* al nacimiento de Jesucristo (fig. 2).

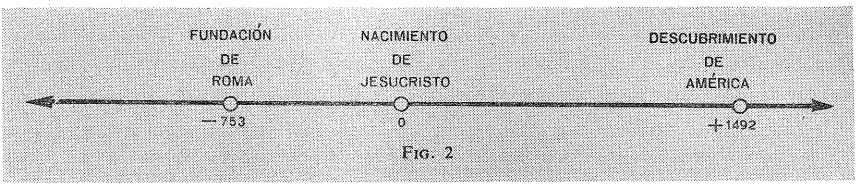


FIG. 2

Al medir una temperatura, se indicarán los grados que marque el termómetro, especificando luego si son *sobre cero* o *bajo cero* (fig. 3).

Si nos dicen que la latitud de un lugar es, por ejemplo, de 25° 14′, desconocemos su situación mientras no se nos especifique si es *Norte* o *Sur*. Igualmente, al expresar la longitud de un lugar, hay que precisar si se trata de longitud *Este* u *Oeste*.

Análoga distinción haremos cuando se trate de determinar otras cantidades, como las *ganancias* o *pérdidas*, el *Haber* o *Debe* de una persona, la *dilatación* o *contracción* de los cuerpos, la *altitud* o *depresión* de un lugar con relación al nivel del mar, etc., etc.

3. Números positivos y números negativos. — En los ejemplos precedentes vemos cómo se distinguen en la conversación ordinaria los dos posibles sentidos de las magnitudes relativas.

Con objeto de unificar y simplificar la notación de las cantidades correspondientes a tales magnitudes, se ha convenido en que al número que expresa la medida de la cantidad prescindiendo del sentido, le pre-

ceda uno de los signos + o −, según que dicha cantidad esté tomada en un sentido o en el sentido contrario. El símbolo obtenido de este modo recibe el nombre de *número positivo*, si lleva el signo +, y de *número negativo*, cuando lleva el signo −.

Según esto, la distancia *OA* (fig. 1) se representará por +3, y la *OB*, por −3. El año +1492 es el 1492 después de J. C., mientras que el año −753 expresa el 753 antes de J. C. (figura 2). Escribiremos +4 grados, para referirnos a la temperatura de 4 grados sobre cero, y −4 grados, cuando queramos expresar 4 grados bajo cero. Una longitud de 3° 19′ Este se representará por +3° 19′, mientras que se pondrá −9° 30′ para indicar 9° 30′ de longitud Oeste. Al decir que una persona ganó +1.320 ptas., queremos indicar que ganó 1.320 ptas., y si, por el contrario, decimos que ganó −750, con ello queremos significar que perdió 750 ptas. Al verificar un balance de cuentas, se expresará por +287 un ingreso de 287 ptas., y por −325, un gasto de 325 pesetas.

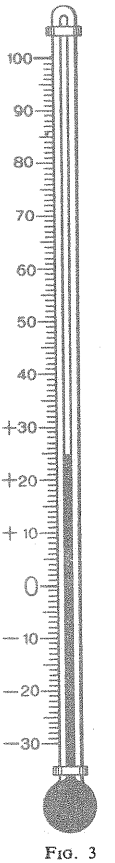


FIG. 3

4. Números racionales. — Todos los números enteros y fraccionarios, positivos y negativos, constituyen los llamados *números racionales.*

Es decir, que *número racional es un número entero o fraccionario, precedido de uno de los signos + o −.*

Con el fin de abreviar la escritura, se prescinde frecuentemente del signo + que precede a los números positivos; así, 5 equivale a +5. Por el contrario, nunca se prescindirá del signo − correspondiente a los números negativos.

He aquí un esquema que nos recuerda la clasificación de los números racionales:

				EJEMPLOS
Números *racionales*	enteros	positivos *(naturales)*.		2; 7; 12
		negativos		−2; −7; −12
	fraccionarios ...	positivos		$\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; 0'25
		negativos		$-\frac{1}{5}$; $-\frac{3}{4}$; −0'25

5. Representación gráfica de los números racionales. — Consideremos una recta $X'X$ (fig. 4) y señalemos en ella un punto O, al que

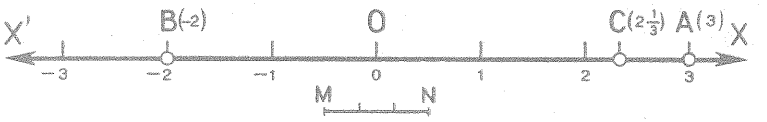


FIG 4

denominaremos *origen*. Si adoptamos como unidad de medida a un segmento determinado *MN*, podremos representar gráficamente sobre dicha recta a cualquier número racional. Bastará llevar a la derecha o a la izquierda del origen la unidad elegida o una de sus partes alícuotas, tantas veces como indica el número de que se trata. Convencionalmente lo haremos a la derecha si el número es positivo, y a la izquierda cuando sea negativo.

Tomando sobre esa recta, a partir de *O*, hacia la derecha, segmentos iguales a la unidad *MN*, obtendremos los puntos correspondientes a los números enteros positivos $+1$, $+2$, $+3$, etc., y si lo hacemos hacia la izquierda hallaremos los que corresponden a los números enteros negativos -1, -2, -3, etc. En la figura, los puntos *A* y *B* representan, respectivamente, a los números 3 y -2.

Para representar gráficamente a un número fraccionario, se divide a la unidad elegida en tantas partes iguales como expresa el denominador, y luego se llevan a la derecha de *O* si el número es positivo, o a la izquierda si es negativo, tantas veces una de esas partes como indica el numerador. Si se trata, por ejemplo, del número $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ dividiremos a la unidad *MN* en 3 partes iguales y llevaremos 7 veces una de ellas a la derecha de *O*, con lo que obtendremos el punto *C*.

Procediendo del modo indicado, se llega a la conclusión de que *a todo número racional corresponde un punto en la recta y solamente uno* (*). El número que corresponde a un punto de la recta se llama *abscisa* de ese punto; así, diremos que la abscisa del punto *A* es 3, la de *B*, -2, y la de *C*, $2\frac{1}{3}$. Al punto *O* se le asigna la abscisa 0.

6. Valor absoluto de un número. — *Valor absoluto o módulo de un número es el mismo número suprimiendo el signo.*

(*) La proposición inversa, es decir, que *a todo punto de la recta corresponde un número racional*, no es cierta, ya que, como se verá en otro curso, hay puntos en la recta a los que no corresponde un número racional, es decir, que hay segmentos sin medida entera ni fraccionaria.

Para indicar el valor absoluto de un número, se escribe dicho número entre dos rayas verticales. Así, pondremos

$$|-2| = 2; \quad |+7| = 7; \quad \left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}; \quad \left|+\frac{5}{9}\right| = \frac{5}{9}$$

igualdades que se leen: *valor absoluto de* -2 *igual a* 2; *valor absoluto de* $+7$ *igual a* 7, etc.

7. Igualdad y desigualdad de números racionales. Números opuestos.

Dos números racionales son iguales cuando tienen el mismo valor absoluto y el mismo signo.

EJEMPLOS:

$$-\tfrac{1}{4} = -0'25; \qquad +0'375 = +\tfrac{3}{8}; \qquad -5\tfrac{3}{4} = -\frac{23}{4}$$

Dos números racionales son desiguales, cuando difieren en el valor absoluto o en el signo, o en ambos a la vez.

EJEMPLOS:

$$+8 \neq +5; \qquad +3 \neq -3; \qquad +\tfrac{2}{3} \neq -\tfrac{3}{8}$$

Dos números racionales son opuestos, cuando tienen igual valor absoluto y distinto signo.

EJEMPLOS:

Son opuestos los números

$$+4 \text{ y } -4; \qquad -\tfrac{2}{5} \text{ y } +\tfrac{2}{5}$$

EJERCICIOS

1. Expresar con números positivos o negativos: *a)* 7 unidades a la derecha del origen, en un eje orientado; *b)* 3 unidades a la izquierda; *c)* 5 unidades a la derecha; *d)* $\frac{2}{3}$ de unidad a la izquierda.

2. En un libro de Historia, la fecha de la primera guerra púnica aparece escrita así: -264; y la de la batalla de Lepanto, $+1571$. ¿Qué significan esos números?

3. La era de los romanos empieza el año 753 antes de Jesucristo, y la de los musulmanes el 622 después de Jesucristo. Referir a ellas las siguientes fechas correspondientes a la era cristiana: -510, -48, 396, 1000, 1453, 1808, 1959.

4. Expresar en números positivos o negativos:

1.º Tres unidades a la derecha del origen, en un eje.
2.º Cuatro grados bajo cero.
3.º Una ganancia de 195 ptas.
4.º Una dilatación de 2 cm.
5.º Una altitud de 1.200 m.
6.º La fecha de la batalla de Zama (202 antes de J. C.).
7.º 42° 15′ de latitud Sur.
8.º Una depresión terrestre de 26 m.
9.º 17° 5′ de longitud Este.
10.º 12° de latitud Norte.

5. Representar sobre un eje $X'X$ los números siguientes:

1.º, -1 3.º, $+\frac{1}{2}$ 5.º, -3 7.º, $+\frac{12}{5}$

2.º, $+4$ 4.º, $+\frac{7}{5}$ 6.º, $-2\frac{3}{4}$ 8.º, $-\frac{10}{3}$

6. Representar sobre un eje $X'X$ los siguientes puntos, dados por sus abscisas, suponiendo que van expresadas en cm.:

$$A(-4),\quad B(+3),\quad C(-1),\quad D\left(-\frac{17}{4}\right)$$

7. Sean A y B dos puntos de abscisas -1 y -5, respectivamente. ¿Cuál será la abscisa del punto medio M del segmento AB?

8. Si el punto A tiene la abscisa $+4$, ¿cuál será la abscisa del A', su simétrico respecto del origen O de abscisas? Sea también el punto B de abscisa -1 y B' su simétrico respecto de O. ¿Cuál es su abscisa?

9. Expresar el valor absoluto de los siguientes números: $+3$, -5, $-\frac{1}{4}$, $+12$, $+\frac{7}{8}$, $-\frac{2}{3}$.

10. ¿Qué diferencia hay entre el valor absoluto de $+7$ y -7? ¿de -6 y $+4$? ¿de $+\frac{5}{8}$ y $-\frac{2}{5}$? ¿de -1 y $+\frac{3}{4}$?

11. Dígase si los siguientes números son iguales, desiguales u opuestos:

1.º, -4 y -7 3.º, $+9$ y -9 5.º $+\frac{5}{8}$ y $-0'625$

2.º, $+0'50$ y $+\frac{1}{2}$ 4.º, $-0'75$ y $-\frac{3}{4}$ 6.º, -9 y $+6$

12. Escribir los opuestos de los siguientes números: -9, $+12$, $-\frac{3}{4}$, $-0'35$, $+a$, $-b$.

2. Operaciones con números racionales

8. **ADICIÓN.** — Por definición se llama suma de varios números racionales, al número obtenido de la siguiente forma (*):

1.º Se suman los valores absolutos de los números positivos.
2.º Se suman los valores absolutos de los números negativos.
3.º El menor resultado se resta del mayor, y a la diferencia se le pone el signo de éste.

EJEMPLO. — *Hallar la suma de los números*

$$+15, \quad -10, \quad +2, \quad -3, \quad -8$$

1.º La suma de los valores absolutos de los números positivos es

$$15 + 2 = 17$$

2.º La suma de los valores absolutos de los negativos es

$$10 + 3 + 8 = 21$$

3.º La diferencia entre estas sumas es

$$21 - 17 = 4,$$

y como el mayor resultado obtenido lleva signo $-$, la suma pedida será -4.

La definición anterior no es sino la interpretación de lo que ocurre en la vida práctica. Veamos un ejemplo:

En cierta fecha se depositan en una Caja de Ahorros 120 *ptas.; algunos días después se retiran* 70 *ptas.; más tarde se ingresan* 20; *otro día se vuelven a ingresar* 45, *y, finalmente, se retiran* 36. *¿Cuál será el saldo final a favor del imponente?*

(*) En lo que sigue diremos con frecuencia *número*, simplemente, refiriéndonos a un número racional, o sea, a un número que puede ser entero o fraccionario, positivo o negativo.

El camino más corto para hallar el saldo final es sumar separadamente las entradas y las salidas, y restar luego ambas sumas, es decir:

ENTRADAS	SALIDAS	SALDO FINAL
120 ptas.	70 ptas.	185 ptas.
20 »	36 »	106 »
45 »	106 ptas.	79 ptas.
185 ptas.		

En el caso de ser dos los sumandos, tendremos las siguientes definiciones:

Suma de dos números de igual signo, es otro número del mismo signo cuyo valor absoluto es igual a la suma de los valores absolutos de los dos sumandos.

EJEMPLOS:

$(+5) + (+9) = +14$; $\quad (-2) + (-8) = -10$; $\quad (-7) + \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{23}{3}$

Suma de dos números de distinto signo es otro número cuyo valor absoluto es la diferencia de los valores absolutos de los dos primeros, y cuyo signo es igual al del número de mayor valor absoluto.

EJEMPLOS:

$(+10) + (-6) = +4$; $\quad (-7) + (+3) = -4$; $\quad \left(-\frac{5}{3}\right) + \left(+\frac{11}{3}\right) = +2$

CASOS PARTICULARES. — 1.° *Si uno de los dos números es cero, la suma es igual al otro número.* Así, $(-9) + 0 = -9$.

2.° *Si los números son opuestos, la suma es igual a cero.* Ejemplo:

$$(+6) + (-6) = 0.$$

9. Notación literal de los números.— Para representar de un modo general a los números, lo hacemos ordinariamente por medio de letras.

Tratándose de números racionales, hay que advertir que las letras que los representan, lo hacen, a la vez, al valor absoluto y al signo. Así, cuando digamos que *a* representa a un número, entenderemos que ese número puede ser positivo o negativo, sin que haya necesidad de indicar el signo.

10. Propiedades de la suma. — Como consecuencia de la definición dada en el párrafo 8, podemos establecer las siguientes propiedades:

PROPIEDAD UNIFORME.

Si se suman miembro a miembro varias igualdades, resulta otra igualdad.

De $0'75 = \frac{3}{4}$, $1'5 = \frac{3}{2}$, $0'2 = \frac{1}{5}$, se deduce:

$$0'75 + 1'5 + 0'2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{5}$$

PROPIEDAD CONMUTATIVA.

La suma de varios números no varía, si se altera el orden de los sumandos.

Es decir, que $a + b + c = b + c + a$

EJEMPLO:

$$(-3) + (+\tfrac{1}{2}) + (+7) = (+\tfrac{1}{2}) + (+7) + (-3) = +4\tfrac{1}{2}$$

PROPIEDAD ASOCIATIVA.

La suma de varios números no varía, si se reemplazan dos o más sumandos por su suma efectuada, o, inversamente, si se descompone uno o más sumandos en una suma.

Podremos escribir, que

$$3 + 7 + 15 = (3+7) + 15 = 10 + 15$$

11. SUSTRACCIÓN. — La sustracción es la operación *inversa* de la suma.

Se llama diferencia entre dos números a *y* b, *al número que es necesario añadir a* b *para que la suma sea* a.

Para hallar la diferencia de dos números, se suma al minuendo el número opuesto del sustraendo.

EJEMPLOS:

$$(+12) - (+9) = (+12) + (-9) = +3$$
$$(+7) - (-11) = (+7) + (+11) = +18$$

12. Polinomio aritmético. — Supongamos, por ejemplo, que de $+3$ se quiere restar -5, y al resultado sumar -6, y de este resultado restar $+7$. El resultado final de estas adiciones y sustracciones de números racionales, puede escribirse así:

$$(+3) - (-5) + (-6) - (+7)$$

Ahora bien, como toda sustracción entre números se reduce a una adición (11), tendremos que restar -5 es lo mismo que sumar $+5$, y restar $+7$ equivale a sumar -7; luego, escribiremos

$$(+3) - (-5) + (-6) - (+7) = (+3) + (+5) + (-6) + (-7)$$

Cuando los números no están representados por letras, para indicar una suma basta escribir uno a continuación de otro todos los sumandos, suprimiendo el signo + que los separaba, con lo cual se abrevia la escritura sin dar lugar a confusión. Además, si el primer número es positivo, se acostumbra a escribir sin el signo.

Según este *convenio*, en lugar del segundo miembro de la igualdad anterior, pondremos

$$3 + 5 - 6 - 7$$

Como se ve, la adición y sustracción constituyen en realidad una operación única, llamada *suma algebraica* o, también, *polinomio aritmético*.

Los sumandos reciben el nombre de *términos* del polinomio o de la suma algebraica.

Así, $3 + 5 - 6 - 7$ es una suma algebraica o polinomio aritmético, cuyos términos son $+3$, $+5$, -6 y -7, y cuyo valor es -5.

13. Restar de un número, o de una suma algebraica, otra suma algebraica. — En ambos casos, bastará añadir al minuendo cada uno de los términos del sustraendo cambiados de signo.

En efecto, supongamos que de m queremos restar $a + b - c$.

Tendremos:

$$m - (a+b-c) = m - a - b + c$$

Ésta será la diferencia buscada, puesto que sumada con el sustraendo reproduce el minuendo:

$$m - a - b + c + (a+b-c) = m - a - b + c + a + b - c = m$$

EJEMPLOS:

$$47 - (3-7-1) = 47 - 3 + 7 + 1$$
$$(-15+11-7) - (6-2-18) = -15 + 11 - 7 - 6 + 2 + 18$$

También podría haberse efectuado primeramente la suma representada por el sustraendo y añadir luego al minuendo el opuesto de este resultado.

Así, el segundo de los ejemplos anteriores puede ser resuelto de este modo:

$$(-15+11-7) - (6-2-18) = -15 + 11 - 7 + 14$$

14. Supresión e introducción de paréntesis.— Teniendo en cuenta la regla seguida en el número anterior, así como la propiedad asociativa de la suma, diremos:

Todo paréntesis precedido del signo + puede suprimirse.
Todo paréntesis precedido del signo − puede suprimirse, con tal de que se escriban con signos contrarios los términos encerrados en él.
E, inversamente, dos o más términos de una suma algebraica pueden encerrarse en un paréntesis, cuidando solamente de cambiarles el signo siempre que dicho paréntesis vaya precedido del signo −.

EJEMPLOS:

1.° $a + (b-c) = a + b - c$
2.° $a - (b-c) = a - b + c$
3.° $a - b + c - d = a - b + (c-d)$
4.° $a - b + c - d = a - b - (-c+d)$

15. Comparación de dos números.— La diferencia entre dos números a y b puede ser nula, positiva o negativa.

Si la diferencia es *nula,* se dice que los números son iguales: $a = b$.
Si la diferencia es *positiva,* se dice que a es mayor que b: $a > b$.
Si la diferencia es *negativa,* se dice que a es menor que b: $a < b$.

Como consecuencia de lo anterior, podemos afirmar:

De dos números positivos, es mayor el de mayor valor absoluto.

EJEMPLO:

$+9 > +5$, pues sucede que $(+9) - (+5) = +9 - 5 = +4$

De dos números negativos, es mayor el de menor valor absoluto.

EJEMPLO:

$-4 > -7$, pues sucede que $(-4) - (-7) = -4 + 7 = +3$

Los números positivos son todos mayores que cero, y los negativos son todos menores que cero.

EJEMPLOS:

$+8 > 0$, ya que $(+8) - 0 = +8$
$-6 < 0$, ya que $(-6) - 0 = -6$

Según la última proposición,

$a > 0$ significa que el número a es *positivo*, y
$a < 0$ significa que el número a es *negativo*.

16. MULTIPLICACIÓN. — Por definición, *se llama producto de dos números racionales, a otro número cuyo valor absoluto es el producto de los valores absolutos de los factores, y cuyo signo es + o −, según que los factores tengan el mismo signo o signos contrarios.*

Si uno de los números es cero, el producto es cero.

La operación por la cual se halla el producto se llama multiplicación.

Representando por a y b a los factores, el producto se indicará por la notación $a \times b$, por $a \cdot b$, o también por ab.

EJEMPLOS:

$(+7) \times (+4) = +28$ $\qquad$ $(-3) \times (+4) = -12$
$(+5) \times (-6) = -30$ $\qquad$ $(-8) \times (-2) = +16$

17. Producto de varios factores. — *Llamamos producto de varios números racionales, al número obtenido multiplicando el primer factor por el segundo, el resultado por el tercero, y así sucesivamente hasta operar con el último factor.*

De la definición anterior se deduce que *el valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos de los factores.*

En cuanto al signo, *el producto llevará el signo + si hay un número par de factores negativos, y el signo − si hay un número impar de ellos.*

NOTACIÓN. — El producto de los números a, b, c, d, se escribe de cualquiera de estas tres formas:

$$a \times b \times c \times d; \qquad a \cdot b \cdot c \cdot d; \qquad abcd$$

EJEMPLOS:

$$(-3)(+5)(-2)(+4) = (-15)(-2)(+4) = (+30)(+4) = +120$$

$$\left(+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(+\frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3}\right)\left(+\frac{3}{4}\right) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4} = -\frac{1}{4}$$

18. **Propiedades de la multiplicación.** — Como consecuencia de las definiciones anteriores, podemos establecer las siguientes propiedades:

PROPIEDAD UNIFORME.

Si se multiplican miembro a miembro varias igualdades, resulta otra igualdad.

De $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, se deduce $a \cdot b \cdot c = a' \cdot b' \cdot c'$

PROPIEDAD CONMUTATIVA.

El producto de varios números no varía, si se altera el orden de los factores.

O sea, que

$$a \times b \times c = b \times c \times a$$

EJEMPLO:

$$(+3)(-5)(-2) = (-5)(+3)(-2) = +30$$

PROPIEDAD ASOCIATIVA.

El producto de varios números no varía, si se reemplazan dos o más factores por su producto efectuado, o, inversamente, si se descompone uno o más factores en un producto.

Podremos escribir, que

$$a \times b \times c \times d = a \times (b \times c) \times d$$

y, también, que

$$(a \times b \times c) \times (d \times e) = a \times b \times c \times d \times e$$

EJEMPLO:

$$(-5)(+6)(-2)(+3) = (-30)(-2)(+3) = +180$$

Consecuencias. — 1.ª *Para multiplicar un producto indicado por un número, se multiplica por dicho número uno cualquiera de los factores.*

EJEMPLO:

$$[(+2)(-3)(+5)] \times (-4) = (+2)(-3)(-20)$$

2.ª *Para multiplicar dos o más productos indicados, se forma un solo producto con todos los factores de aquéllos.*

EJEMPLO:

$$[(+7)(+3)(-2)] \times [(-5)(-4)] = (+7)(+3)(-2)(-5)(-4)$$

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA.

Para multiplicar una suma algebraica por un número, basta multiplicar sucesivamente todos los términos de la suma por dicho número, y escribir cada uno de los productos obtenidos con su signo correspondiente.

EJEMPLOS:

$$(2-3-5)(-6) = (+2)(-6) + (-3)(-6) + (-5)(-6) = -12 + 18 + 30$$
$$(3-\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{4})(+4) = (+3)(+4) + (-\tfrac{1}{2})(+4) + (+\tfrac{3}{4})(+4) = 12 - 2 + 3$$

19. Producto de dos sumas indicadas. — *Para multiplicar dos sumas indicadas, se multiplican sucesivamente todos los términos de la primera por cada uno de los términos de la segunda, y se forma luego una suma con los productos obtenidos.*

Esta regla es una consecuencia de la propiedad distributiva. En efecto, se tiene, por ejemplo:

$$(a+b+c)(m+n) = (a+b+c)m + (a+b+c)n =$$
$$= am + bm + cm + an + bn + cn$$

EJEMPLO:

$$(2+3-7)(5-4+6) = 10 + 15 - 35 - 8 - 12 + 28 + 12 + 18 - 42$$

20. DIVISIÓN. — Por definición, *se llama cociente de dos números racionales, denominados dividendo y divisor, a un tercer número que multiplicado por el divisor produce el dividendo.*

El divisor ha de ser diferente de cero.

División es la operación que tiene por objeto hallar el cociente de dos números; es la operación *inversa* de la multiplicación.

Como consecuencia de la definición de cociente, se tiene:

1.° *El valor absoluto del cociente es igual al cociente de los valores absolutos del dividendo y divisor.*

2.° *El signo del cociente será + o −, según que los dos números, dividendo y divisor, tengan el mismo o distinto signo.*

EJEMPLOS:

$$\begin{array}{llll} (+28):(+4) = +7 & \text{ya que} & (+7)(+4) = +28 \\ (+6):(-\frac{2}{5}) = -15 & \text{ya que} & (-15)(-\frac{2}{5}) = +6 \\ (-2\frac{5}{8}):(+7) = -\frac{3}{8} & \text{ya que} & (-\frac{3}{8})(+7) = -2\frac{5}{8} \\ (-9):(-4) = +2'25 & \text{ya que} & (+2'25)(-4) = -9 \end{array}$$

21. Propiedades de la división. — He aquí las dos propiedades que posee la división:

PROPIEDAD UNIFORME.

Si se dividen miembro a miembro dos igualdades, resulta otra igualdad.

De $a = a'$ y $b = b'$ se deduce $a : b = a' : b'$

De $0'4 = \frac{2}{5}$ y $0'75 = \frac{1}{4}$ se deduce $0'4 : 0'75 = \frac{2}{5} : \frac{1}{4}$

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA.

Para dividir una suma algebraica por un número, basta dividir sucesivamente todos los términos de la suma por dicho número, y escribir cada uno de los cocientes obtenidos con su signo correspondiente.

EJEMPLOS:

$$(-9+12-27):3 = -3+4-9$$
$$(16-28+\tfrac{1}{2}-40):(-4) = -4+7-\tfrac{1}{8}+10$$

Para demostrar esta propiedad, basta tener en cuenta que la división es la operación inversa de la multiplicación.

Tendremos, en efecto, que si

$$a : n = a' \qquad b : n = b' \qquad c : n = c'$$

será $$(a-b+c) : n = a' - b' + c'$$

ya que $$(a'-b'+c')n = a - b + c$$

EJERCICIOS

Efectuar la suma de los siguientes números:

13. $-9'82,\ -7'39$
14. $+11'3,\ -23'14$
15. $+2,\ -3,\ +4,\ -5,\ +6$
16. $-12,\ -8,\ +22,\ -7,\ +8$
17. $-10,\ +4,\ -6,\ -7,\ +2$
18. $+5,\ +3,\ -14,\ -5$

19. $\frac{4}{5},\ -\frac{8}{9},\ +\frac{2}{3},\ -\frac{26}{45}$

20. $+\frac{5}{6},\ +\frac{3}{4},\ +\frac{2}{3},\ -\frac{5}{7}$

21. $-\frac{5}{4},\ -2,\ +\frac{20}{3},\ -\frac{5}{6}$

22. $-\frac{3}{4},\ -\frac{5}{8},\ +2\frac{7}{12},\ -3$

23. $-4'51,\ -\frac{4}{5},\ -\frac{7}{20},\ +\frac{5}{12}$

24. $+1,\ -\frac{3}{8},\ -2,\ +\frac{7}{32},\ -\frac{1}{48}$

Efectuar las sustracciones siguientes:

25. $(+4'5)-(+5'49)$

26. $(-2'3)-(-5'7)$

27. $(-9'2)-(+0'3)$

28. $(-13'75)-(+4'01)$

29. $\left(+\frac{5}{6}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)$

30. $\left(-\frac{2}{5}\right)-\left(-\frac{1}{13}\right)$

31. $\left(-\frac{11}{9}\right)-\left(+\frac{1}{6}\right)$

32. $\left(+\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{7}{9}\right)$

33. $\left(-2\frac{1}{5}\right)-\left(-5\frac{1}{3}\right)$

Hallar el valor de las siguientes sumas algebraicas:

34. $(+2)-(-3)+(+4)-(-5)-(+7)$
35. $(-12)-(-8)-(+22)+(-7)+(+8)$
36. $(+5)-(+2)+(-3)-(+12)-(+7)$
37. $(-7)-(-9)-(+17)+(-41)+(+1)$
38. $(+19)+(-3)-(-63)+(+6)-(-4)$

39. $(-5-2+1-11)-(7-18-3+2-4)$
40. $(5-3+7-1)+(-9+4-1)-(-3-7+2)$
41. $(2-4-8+5)-(-6+2+3-4)+10-(7+4)$
42. $(-7-2+3)-4+(6+7-9)-(-7-4+19)$
43. $(3'22-2'3-5'7)-(-172'27+0'23)-2'5$

44. $[(5-9)+(3-5)]-[(7+3-5)-(7-10)]$

45. $[(3-1+7+2-6)+(6-2+3)]-[(-8-2-5)-(7-13+1)]$

46. $[(9+2+5-4)-(6-14+10)]-(-7)$

47. $[(5-2-3)-(-2)]-\left[\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{5}{2}\right)+(-2)\right]$

48. $\left[1-\left(\frac{2}{5}-\frac{4}{3}\right)\right]-\left[\left(\frac{4}{5}-1\right)-\left(\frac{7}{5}+2\right)\right]$

49. Indíquese por una desigualdad, que:

a) n es positivo
b) n es negativo
c) a es mayor que b
d) n es menor que m

50. Escribir los números siguientes en orden decreciente:

$$-\frac{3}{4},\quad -\frac{5}{6},\quad 7,\quad -1,\quad 2,\quad \frac{4}{9},\quad -3,\quad -0'8,\quad \frac{15}{7}$$

Efectuar los productos que se indican a continuación:

51. $\left(+\frac{4}{3}\right)\times\left(+\frac{15}{16}\right)$

52. $\left(-\frac{5}{16}\right)\times\left(-\frac{4}{5}\right)$

53. $\left(-\frac{5}{7}\right)\times\left(-\frac{28}{15}\right)$

54. $(+6)\times(-4)\times(-1)$

55. $(-3)\times(+7)\times(-5)$

56. $(+7)\times(-5)\times(+2)$

57. $\left(-2\frac{1}{3}\right)\times\left(+\frac{6}{7}\right)$

58. $\left(-\frac{3}{5}\right)\times(+3)\times\left(-\frac{5}{3}\right)$

Efectuar los productos siguientes, empleando dos métodos distintos:

59. $(-5+7-9-3)\times(-2)$

60. $(-14+0'3)\times(+0'05)$

61. $(+8-2+9)(-4+2)$

62. $(+5-1+3-1)(-5+2)$

Efectuar por el método más rápido las operaciones siguientes:

63. $(5-3+2)(12-9)+(15-17)(7-10)$

64. $[(6-4-3)-(-7+1+2)]\cdot(-6)$

65. $(7-17)(10-12)-(13-17)(-14+12)$

66. $(\frac{2}{3}-1+7+2)(-6-5+10)\left(3-\frac{15}{2}+6\right)$

67. $(2'5+0'7)(7'9-8)-0'5(11-3)$

68. Indicar para qué valores de x se anula el producto

$$(x+3)(x-2)(x+5)(x+1)$$

69. $(+105):(-7)$

70. $(-286):(-13)$

71. $\left(-\frac{7}{3}\right):\left(+\frac{5}{3}\right)$

72. $\dfrac{-12+4-72}{4}$

73. $(+221):(-17)$

74. $(-360):(+12)$

75. $(-7'5):\left(-\frac{4}{5}\right)$

76. $\dfrac{7-0'5+2}{2}$

77. $(-35+140-49-77+210):(-7)$

3. Operaciones con números racionales *(continuación)*

22. Potenciación. — *Se llama potencia enésima de un número racional* a, *siendo* n *un número natural mayor que* 1, *al producto de* n *factores iguales* a *a.*

La potencia se representa por a^n; el número *a* se denomina *base* de la potencia, y el número *n*, que indica las veces que se ha de tomar la base *a* como factor, se llama *exponente* de la potencia e indica el *grado* de la misma.

La operación por la cual se halla la potencia de un número se denomina *potenciación* o *elevación a potencias.*

De acuerdo con la definición, $a \times a$ equivale a a^2 y se lee *a elevado al cuadrado,* o mejor *a dos;* de igual modo, $a \times a \times a$ se escribe a^3 y se lee *a elevado al cubo,* o simplemente *a tres,* etc.

Como para los números naturales, *admitiremos:*

La potencia de exponente 1 de un número, representa siempre a ese mismo número.

Diremos, por tanto, que

$$13^1 = 13; \quad \left(-\tfrac{2}{5}\right)^1 = -\tfrac{2}{5}; \quad \text{y, en general,} \quad a^1 = a.$$

La potencia de exponente cero de un número, representa siempre a la unidad.

Es decir, que

$$(-7)^0 = 1; \quad \left(\tfrac{3}{4}\right)^0 = 1; \quad \text{y, en general,} \quad a^0 = 1.$$

23. Valor absoluto y signo de la potencia. — Teniendo en cuenta las propiedades del producto de varios factores (17), podremos afirmar:

1.º El valor absoluto de la potencia de un número es igual a la potencia del módulo de dicho número.

2.° Toda potencia de exponente par es un número positivo.

Así,

$$(+3)^4 = 81; \qquad (-3)^4 = 81; \qquad (+\tfrac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}; \qquad (-\tfrac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$$

3.° Toda potencia de exponente impar es un número del mismo signo que la base.

Así,

$$(+5)^3 = 125; \qquad (-5)^3 = -125; \qquad (+\tfrac{1}{3})^5 = \frac{1}{243}; \qquad (-\tfrac{1}{3})^5 = -\frac{1}{243}$$

24. Propiedades de las potencias.

1.ª El producto de varias potencias de la misma base, es otra potencia de igual base, cuyo exponente es igual a la suma de los exponentes de los factores.

Sea, por ejemplo, $a^2 \cdot a^3$.

Se tiene:

$$a^2 = a \cdot a$$
$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$

luego, $$a^2 \cdot a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5 = a^{2+3}$$

En general, escribiremos:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

EJEMPLOS:

$$(-4)^2 \cdot (-4)^5 = (-4)^7; \qquad (+\tfrac{2}{3})^3 \cdot (+\tfrac{2}{3})^5 \cdot (+\tfrac{2}{3}) = (+\tfrac{2}{3})^9$$

2.ª El cociente de dos potencias de igual base, es otra potencia de la misma base, cuyo exponente es la diferencia entre el exponente del dividendo y el del divisor.

Dividamos, por ejemplo, a^5 por a^3. Tenemos:

$$a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$
$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$

luego, $$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a^2 = a^{5-3}$$

En general, suponiendo que m es mayor que n, tendremos:

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

EJEMPLOS:

$$7^{11} : 7^5 = 7^6; \qquad (-4)^9 : (-4)^2 = (-4)^7; \qquad \left(-\tfrac{5}{8}\right)^4 : \left(-\tfrac{5}{8}\right)^3 = -\tfrac{5}{8}$$

3.ª El resultado de elevar una potencia a otra potencia, es una potencia del mismo número, cuyo exponente es el producto de los exponentes.

$$(a^3)^4 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{3 \times 4} = a^{12}$$

En general:

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

EJEMPLOS:

$$(3^2)^4 = 3^8; \qquad [(-2)^3]^2 = (-2)^6; \qquad \left[\left(-\tfrac{1}{4}\right)^2\right]^2 = \left(-\tfrac{1}{4}\right)^4$$

4.ª La potencia de un producto es igual al producto de las potencias de igual grado de cada factor (PROPIEDAD DISTRIBUTIVA RESPECTO DE LA MULTIPLICACIÓN).

En efecto: aplicando la definición de potencia y teniendo luego en cuenta la propiedad asociativa del producto de varios factores, tendremos:

$$(a \cdot b \cdot c)^3 = a \cdot \ b \cdot c \times a \cdot b \cdot c \times a \cdot b \cdot c = a^3 \cdot b^3 \cdot c^3$$

En general:

$$(a \cdot b \cdot c)^m = a^m \cdot b^m \cdot c^m$$

Si alguno de los factores estuviera afectado de exponente, se tendrá en cuenta la tercera propiedad. Así,

$$(a \cdot b^2 \cdot c^3)^2 = a^2 \cdot b^4 \cdot c^6$$

EJEMPLOS:

$$[(-2) \cdot (+0'5) \cdot \left(-\tfrac{1}{4}\right)]^3 = (-2)^3 \cdot (+0'5)^3 \cdot \left(-\tfrac{1}{4}\right)^3$$

$$[(-3)^2 \cdot \left(+\tfrac{5}{8}\right) \cdot (+7) \cdot \left(-\tfrac{2}{3}\right)^3]^5 = (-3)^{10} \cdot \left(+\tfrac{5}{8}\right)^5 \cdot (+7)^5 \cdot \left(-\tfrac{2}{3}\right)^{15}$$

5.ª La potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias de igual grado del dividendo y divisor (PROPIEDAD DISTRIBUTIVA RESPECTO DE LA DIVISIÓN).

En efecto:

$$(a : b)^3 = \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3} = a^3 : b^3$$

En general:

$$(a : b)^m = a^m : b^m$$

Si el dividendo, o el divisor, o ambos a la vez estuvieran afectados de exponentes, se aplicará la tercera propiedad. Así,

$$(a^2 : b^3)^5 = a^{10} : b^{15}$$

EJEMPLOS:

$$[(+12) : (-4)]^2 = (+12)^2 : (-4)^2$$
$$[(-6) : (-\tfrac{1}{3})^2]^3 = (-6)^3 : (-\tfrac{1}{3})^6$$

25. Radicación.— *Se llama raíz enésima de un número racional* a, *siendo* n *entero y positivo, a otro número que elevado a la potencia enésima produce el primero,* a.

La raíz se representa por $\sqrt[n]{a}$; *n* es el *índice* o *grado* de la raíz y *a* el *radicando.*

Radicación o *extracción de raíces* es la operación por la cual se halla la raíz de un número. La radicación es la operación inversa de la potenciación. De acuerdo con esto y según la definición anterior, podremos escribir:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a; \qquad \text{o, también,} \qquad \sqrt[n]{a^n} = a$$

El índice 2 no suele escribirse. La expresión $\sqrt{a}$ se lee *raíz cuadrada de a;* $\sqrt[3]{a}$, se lee *raíz cúbica de a;* $\sqrt[4]{a}$, se lee *raíz cuarta de a;* $\sqrt[5]{a}$, *raíz quinta de a,* etcétera.

26. Valor absoluto y signo de la raíz.— Fácilmente se deduce:

1.° El valor absoluto de la raíz de un número es igual a la raíz del valor absoluto de dicho número.

2.° La raíz de índice impar tiene el mismo signo que el radicando.

EJEMPLOS:

$$\sqrt[3]{+64} = +4, \quad \text{pues} \quad (+4)^3 = +64$$
$$\sqrt[5]{-243} = -3, \quad \text{pues} \quad (-3)^5 = -243$$

3.° La raíz de índice par de un número positivo tiene dos valores, uno con el signo + y otro con el signo −.

EJEMPLOS:

$$\sqrt[4]{81} = \begin{cases} +3 \\ -3 \end{cases} \quad \text{ya que} \quad \begin{cases} (+3)^4 = 81 \\ (-3)^4 = 81 \end{cases}$$

$$\sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \begin{cases} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{ya que} \quad \begin{cases} (+\frac{1}{2})^6 = \frac{1}{64} \\ (-\frac{1}{2})^6 = \frac{1}{64} \end{cases}$$

4.° La raíz de índice par de un número negativo no es ningún número de los conocidos. Se dice que es un número imaginario.

EJEMPLO:

$\sqrt{-16}$ no existe, pues $\left\{ \begin{array}{l} \text{ni } (+4)^2 \text{ da } -16 \\ \text{ni } (-4)^2 \text{ da } -16 \end{array} \right.$

27. Propiedades de la radicación.

1.ª La raíz de un producto es igual al producto de las raíces del mismo grado de cada factor (PROPIEDAD DISTRIBUTIVA RESPECTO DE LA MULTIPLICACIÓN).

En efecto:

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c}$$

puesto que

$$(\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c})^n = (\sqrt[n]{a})^n \times (\sqrt[n]{b})^n \times (\sqrt[n]{c})^n = abc$$

EJEMPLO:

$$\sqrt[3]{27 \times 343 \times 729} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{343} \times \sqrt[3]{729} = 3 \times 7 \times 9$$

2.ª La raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces del mismo grado del dividendo y divisor (PROPIEDAD DISTRIBUTIVA RESPECTO DE LA DIVISIÓN).

En efecto:

$$\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$$

puesto que

$$(\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n : (\sqrt[n]{b})^n = a : b$$

EJEMPLO:

$$\sqrt{(+144):(+9)} = \sqrt{+144} : \sqrt{+9} = \begin{cases} (+12):(+3) \\ (-12):(-3) \end{cases}$$

3.ª La raíz de una potencia, cuando el exponente es divisible por el índice de la raíz, es otra potencia de la misma base, cuyo exponente es el cociente de dividir el exponente por el índice de la raíz.

Se tiene, en efecto:

$$\sqrt[n]{a^{mn}} = a^{mn:n} = a^m, \quad \text{ya que} \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

EJEMPLOS:

$$\sqrt[4]{6^{12}} = 6^{12:4} = 6^3; \qquad \sqrt{(-\tfrac{1}{2})^4} = (-\tfrac{1}{2})^2$$

28. Observaciones. — 1.ª Según hemos visto (26, 3.º), la radicación de números racionales no da siempre un resultado único, es decir que *la radicación no tiene la propiedad uniforme.*

De otro modo: *Al extraer la raíz de los dos miembros de una igualdad, los resultados no son siempre iguales. Para que lo sean, hay que tomar los mismos signos finales en los dos miembros.*

2.ª Ni la potenciación ni la radicación poseen la propiedad distributiva respecto de la suma algebraica.

EJEMPLOS:

$(3-7+9)^2$ no es igual a $3^2 + (-7)^2 + 9^2$

$\sqrt[3]{8+27-125}$ no es igual a $2 + 3 - 5$

EJERCICIOS

Hallar el valor de las siguientes potencias:

78. $(-5)^3$; $(+4)^4$; $(-7)^2$; $(+2)^6$; $(+3)^4$; $(-4)^3$

79. $(-2)^5$; $(+8)^2$; $(-5)^5$; $(-3)^1$; $(+7)^0$; $(-37)^0$

80. $(+\frac{1}{2})^3$; $(-\frac{2}{5})^2$; $(-\frac{3}{8})^0$; $(+\frac{2}{3})^1$; $(-\frac{3}{4})^3$; $(+\frac{7}{8})^1$

Haciendo uso de las propiedades de las potencias, calcular:

81. $(+3)^3 \cdot (+3)^4$

82. $(-4)^3 \cdot (-4)$

83. $(-2)^5 \cdot (-2)^2$

84. $(\frac{2}{3}) \cdot (\frac{2}{3})^4$

85. $(-1)^4 \cdot (-1)^5 \cdot (-1)^2$

86. $(+3)^2 \cdot (+3) \cdot (+3)^5$

87. $(-\frac{1}{4})^3 \cdot (-\frac{1}{4}) \cdot (-\frac{1}{4})^2$

88. $(\frac{3}{8})^2 \cdot (\frac{3}{8}) \cdot (\frac{3}{8}) \cdot (\frac{3}{8})^2$

89. $(+6)^7 : (+6)^3$

90. $(-2)^{12} : (-2)^3$

91. $(+\frac{2}{5})^6 : (+\frac{2}{5})$

92. $(-5)^7 : (-5)^4$

93. $(+7)^4 : (+7)^2$

94. $(-\frac{7}{8})^{38} : (-\frac{7}{8})^{35}$

95. $[(+2)^2]^2$; $[(-3)^3]^3$; $[(+\frac{1}{2})^2]^3$; $[(-\frac{3}{4})^3]^4$

96. $[(-2) \cdot (+\frac{1}{2})^2 \cdot (-3)]^3$; $[(+\frac{3}{4}) \cdot (-5)^2 \cdot (-2)^3]^2$

97. $[(+6) : (-2)]^3$; $[(-21) : (-7)]^2$; $(16^2 : 4)^3$

Extraer las raíces siguientes:

98. $\sqrt[3]{+27}$; $\sqrt[3]{-27}$; $\sqrt{+36}$; $\sqrt{-36}$; $\sqrt[5]{-32}$

99. $\sqrt[6]{+729}$; $\sqrt[6]{-729}$; $\sqrt[3]{+343}$; $\sqrt[3]{-343}$; $\sqrt[5]{-243}$

100. $\sqrt[3]{1000}$; $\sqrt[3]{-1000}$; $\sqrt[4]{0'0625}$; $\sqrt[3]{-0'064}$; $\sqrt[5]{-0'00001}$

101. $\sqrt{\frac{25}{49}}$; $\sqrt{-\frac{4}{81}}$; $\sqrt[3]{-\frac{1}{1000}}$; $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$; $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$

Haciendo uso de las propiedades de la radicación, calcular:

102. $\sqrt[3]{(-8) \times (-27) \times 64}$; $\sqrt[5]{243 \times (-32) \times 0'00001}$

103. $\sqrt{(+25) : (+0'0001)}$; $\sqrt[3]{(-81)^2 : (+3)^2}$; $\sqrt[3]{(+8) : (-0'064)}$

104. $\sqrt{3^8}$; $\sqrt[3]{(-5)^6}$; $\sqrt[3]{(-2)^{15}}$; $\sqrt[5]{7^{10}}$; $\sqrt[7]{(-\frac{1}{2})^{21}}$

4. Expresiones algebraicas

29. Expresiones algebraicas. — *Se da el nombre de expresiones algebraicas al conjunto de números y letras unidos por los signos de las diversas operaciones.*

Son ejemplos de expresiones algebraicas los siguientes:

$$3ab + 5; \qquad (x+y)(2x-y); \qquad \frac{5a-2b}{3c}; \qquad \frac{3a+2\sqrt{b}}{5-4c}$$

30. Clasificación de las expresiones algebraicas. — 1.° Decimos de una expresión algebraica que es *racional respecto de una letra,* si dicha letra no aparece debajo de ningún signo radical. En caso contrario, se dice que la expresión es *irracional respecto de esa letra.*

Así,

$$2a^3 - \sqrt{b} \quad \text{y} \quad a^2 - 5a\sqrt[3]{b}$$

son racionales respecto de a, e irracionales con relación a b.

De una expresión se dice, en general, que es racional, cuando lo es con relación a todas sus letras.

Tales son, por ejemplo, las expresiones

$$2a^3b; \qquad \tfrac{2}{3}ab^2; \qquad \frac{m}{\sqrt{3}(a-b)}$$

2.° De una expresión algebraica racional con relación a una letra, se dice que es *entera respecto de dicha letra,* si ésta no aparece en ningún divisor o denominador. En caso contrario, se dice que la expresión es *fraccionaria respecto de esa letra.*

Las expresiones

$$\frac{3a+2b}{5-7c} \quad \text{y} \quad \frac{4a-7\sqrt{b}}{c-1}$$

son enteras con relación a la letra a, fraccionarias respecto de c, y la segunda es irracional con relación a b.

De una expresión racional se dice, en general, que es entera, cuando lo es con relación a todas sus letras.

EJEMPLO. — Son enteras las expresiones

$$2a^3b - 5c \quad \text{y} \quad \frac{2ab}{3} + \sqrt{3}(a-b)$$

31. Valor numérico de una expresión algebraica. — *Valor numérico de una expresión algebraica es el número que se obtiene al atribuir un valor a cada una de las letras y realizar luego las operaciones indicadas.*

Así, la expresión $3a^4bc + 2b^2 - c$, para $a = -1$, $b = 3$ y $c = -\frac{1}{2}$, tiene el valor

$$3\cdot(-1)^4\cdot 3\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) + 2\cdot 3^2 - \left(-\tfrac{1}{2}\right) = -\frac{9}{2} + 18 + \tfrac{1}{2} = 14$$

y para

$$a = 1, \quad b = -2 \quad \text{y} \quad c = -1,$$
$$3\cdot 1^4\cdot(-2)\cdot(-1) + 2\cdot(-2)^2 - (-1) = 6 + 8 + 1 = 15$$

Una expresión tendrá, evidentemente, un valor numérico por cada sistema de valores que se dé a sus letras. Sin embargo, ocurre en ciertas expresiones algebraicas que no es posible realizar las operaciones que se indican, cuando se atribuye a sus letras determinados valores. Tal ocurre con las fracciones algebraicas para valores que anulen el denominador, o con las raíces de índice par si, después de sustituir las letras por sus valores, resulta un radicando negativo.

Así, para $x = 1$, las expresiones

$$\frac{x+1}{x-1} \quad \text{y} \quad \sqrt{x-2}$$

carecerán de valor numérico, por no ser posible practicar la división cuando el divisor es nulo, ni hallar la raíz par de un número negativo.

32. Expresiones algebraicas equivalentes. Identidad. Ecuación. — *Se denominan* EXPRESIONES EQUIVALENTES, *aquellas que toman el mismo valor numérico para todos los sistemas de valores que se den a sus letras.*

Así, son expresiones equivalentes

$$a^2 - b^2 \qquad \text{y} \qquad (a+b)(a-b)$$

pues para cualquier sistema de valores de a y b se tiene

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Compruébese, por ejemplo, para los valores

$$a = 2, \quad b = -3 \quad \text{y} \quad a = -1, \quad b = 7$$

IDENTIDAD. — *Se llama identidad a toda igualdad entre dos expresiones equivalentes.*

Según esto, las igualdades

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \qquad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b); \qquad 5a^2 - ab = a(5a-b)$$

son ejemplo de identidades.

Cuando se quiere hacer constar que una igualdad es al mismo tiempo una identidad, se escribe entre sus miembros el signo $\equiv$, que se lee «idéntico a».

Así, a veces veremos escrito

$$(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2; \qquad (a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2;$$
$$5a^2 - ab \equiv a(5a-b)$$

ECUACIÓN. — *Se llama ecuación a la igualdad que únicamente se verifica para ciertos valores numéricos de las letras que en ella intervienen, denominadas incógnitas.*

Una ecuación es, pues, una igualdad *condicional*, mientras que una identidad es una igualdad *absoluta*.

Por ejemplo, la igualdad

$$x^2 - 15 = 2x$$

es una ecuación con una incógnita, ya que, en efecto, sus dos miembros toman el mismo valor solamente cuando se sustituye x por 5 o por -3.

33. Monomios y polinomios. — MONOMIO *es una expresión algebraica cuyas letras están sometidas únicamente a las operaciones de multiplicar y dividir.*

EJEMPLOS. — Son monomios

$$3ab^2c; \qquad 2ax^3 \cdot \left(-\tfrac{1}{5}y\right); \qquad \sqrt{5}\,a^2b; \qquad -\tfrac{1}{2}mn \times 4xy^2$$

Coeficiente de un monomio es la parte formada por los factores numéricos, la cual suele escribirse delante, después de efectuar su producto. Su *signo* es también el signo del monomio.

En los monomios anteriores, los coeficientes son

$$3; \qquad 2 \times (-\tfrac{1}{5}) = -\tfrac{2}{5}; \qquad \sqrt{5}; \qquad (-\tfrac{1}{2}) \times 4 = -2$$

El segundo y cuarto monomios, escritos en forma abreviada, serán

$$-\tfrac{2}{5}\,ax^3y; \qquad -2\,mnxy^2$$

El coeficiente 1 no suele escribirse. Así, $-ab^2$ equivale a $-1\,ab^2$.

POLINOMIO *es una expresión algebraica formada por varios monomios, unidos por los signos de adición o de sustracción.*

Así, la expresión

$$2\,a^2b - 3\,b^2c - 5\,c^3$$

es un polinomio, formado por los monomios

$$2\,a^2b; \qquad -3\,b^2c \qquad \text{y} \qquad -5\,c^3$$

Los monomios que forman el polinomio, reciben el nombre de *términos* del polinomio.

El polinomio de dos términos se llama también *binomio*, y el de tres, *trinomio*.

Un monomio, y por consiguiente todo término de un polinomio, puede ser una expresión irracional, como en $7\,x^2 - 3\sqrt{xy} + xy$.

Igualmente, los monomios y polinomios pueden ser expresiones fraccionarias, como por ejemplo,

$$x^2 - 2\,ax - 7\,a^2 + \frac{3\,a^2}{x} - \frac{6\,a^4}{x^2}$$

No obstante, de no advertir lo contrario, al hablar de monomios y polinomios, nos referiremos solamente a expresiones enteras.

34. Términos semejantes.

Términos semejantes de un polinomio son los monomios o términos que tienen la misma parte literal, es decir, las mismas letras, afectadas de los mismos exponentes.

Los términos semejantes pueden diferir únicamente en sus coeficientes.

EJEMPLO. — En el polinomio

$$3\,x^2y - 2\,xy^2 + 7\,x^2y + \tfrac{3}{4}\,xy^2$$

los términos primero y tercero son semejantes, y lo son también entre sí el segundo y cuarto

35. Reducción de términos semejantes. — Cuando en un polinomio hay términos que son semejantes, se puede sacar factor común la parte literal de dichos términos, a la que corresponderá por coeficiente la suma de los coeficientes de aquéllos.

Esta operación se llama *reducir términos semejantes*, y el polinomio o monomio que resulta se llama *reducido*.

EJEMPLO. — El polinomio

$$2x^3 - 3x^2y + 2xy^2 + 7x^2y - 3x^3 - 4xy^2 + x^3$$

equivale a

$$(2-3+1)x^3 + (-3+7)x^2y + (2-4)xy^2 = 0x^3 + 4x^2y - 2xy^2 = 4x^2y - 2xy^2$$

36. Grado de un monomio.

Grado de un monomio es el número que resulta de sumar los exponentes de todas sus letras.

Según esto, los monomios

$$3a^3b^2x \quad \text{y} \quad 7ab$$

serán de *sexto* y de *segundo* grado, respectivamente.

Grado de un monomio con relación a una letra es el exponente que lleva dicha letra en el monomio.

El monomio $3a^3b^2x$ es de tercer grado respecto de a, de segundo con relación a b y de primero con relación a x.

Cuando una letra determinada no figura en un monomio, se dice de éste que es *independiente de dicha letra*, o, también, que el monomio es de *grado cero* respecto de esa letra.

Así, diremos que el monomio $7ab$ es de grado cero respecto de x, o que es independiente de x.

37. Grado de un polinomio.

Grado de un polinomio es el grado del término o términos que lo tengan mayor.

Sean, por ejemplo, los polinomios

$$2ax^2 - 3bx + c \quad \text{y} \quad 5x^4y + x^2y^3 - 2y^4$$

El primero es de *tercer* grado, y el segundo, de *quinto* grado.

Cuando en un polinomio hay términos semejantes, deberá hallarse el correspondiente reducido antes de determinar el grado; de lo contrario, podría incurrirse en error.

Así, aunque el polinomio

$$2x^3 - x^4 + 5x^2 - x^3 - 2x^2 + x^4 - 7x - x^3 + 9$$

aparentemente sea de cuarto grado, después de reducir términos semejantes, resulta el polinomio reducido

$$3x^2 - 7x + 9$$

que es de *segundo* grado.

Grado de un polinomio respecto de una letra es el del término que lo tenga mayor con relación a dicha letra.

EJEMPLO. — El polinomio

$$a^5 - 7a^4b^2 + \tfrac{2}{3}a^2b^3c$$

es de *quinto* grado respecto de *a*, de tercero con relación a *b*, y de *primero* respecto de *c*.

38. Polinomio ordenado. — El valor numérico de un polinomio no varía si se altera el orden de sus términos, con tal de que éstos conserven sus signos respectivos.

Basados en esta propiedad, podemos ordenar los términos de un polinomio con relación a una letra, ya sea según sus potencias decrecientes, o bien según las potencias crecientes. Del polinomio se dice entonces que está *ordenado*, y la letra con relación a la cual se ha ordenado se llama *ordenatriz* o *principal*.

EJEMPLOS. — 1.° El polinomio

$$4a - 3a^2 - 2a^4 - 7a^3 - a + 3a^4 + 2a^2 + 5a^3 + 4$$

ordenado con relación a las potencias decrecientes de *a*, será

$$a^4 - 2a^3 - a^2 + 3a + 4$$

y según las potencias crecientes de *a*,

$$4 + 3a - a^2 - 2a^3 + a^4$$

2.° El polinomio

$$5ax^2 + 2a^2x - a^3 - 3b^2x + 7bx^2 - b^3$$

ordenado según las potencias decrecientes de *x*, será

$$(5a+7b)x^2 + (2a^2-3b^2)x - (a^3+b^3)$$

39. Polinomio homogéneo y polinomio completo.

Un polinomio es homogéneo **cuando todos sus términos son del mismo grado.**

EJEMPLO:

$$a^4 - 3a^3b + 5a^2b^2 - ab^3 + 7b^4$$

Se dice que un polinomio es *completo* con relación a una letra, cuando tiene todas las potencias consecutivas de esa letra, desde el término que indica el grado del polinomio hasta el independiente o de grado cero, respecto de dicha letra.

Cuando carece de alguna de las potencias intermedias, o del término independiente, el polinomio es *incompleto.*

EJEMPLOS. — Es completo, con relación a x e y, el polinomio

$$3x^4 - 2x^3y + 7x^2y^2 - 4xy^3 + 5y^4$$

En cambio, son incompletos

$$x^3 - 7x^2 + 36 \quad \text{y} \quad 4a^5 - 3a^4 + a^3 - 7a$$

EJERCICIOS

Decir si las expresiones siguientes son racionales o irracionales; en el primer caso, añádase si son enteras o fraccionarias:

105. *a)* $5ax^3$; *b)* $ax\sqrt{4}$; *c)* $\dfrac{4\sqrt{a}}{3}$

106. *a)* $\dfrac{3a^2c}{b}$; *b)* $\dfrac{x\sqrt{7}}{2a}$; *c)* $\dfrac{5a\sqrt{143}}{2\sqrt{3}\,bc}$

107. *a)* $4\sqrt{x} + bc$; *b)* $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} + \dfrac{1+x}{1-x}$; *c)* $\dfrac{h}{3}(b + b' + \sqrt{b \cdot b'})$

Hallar el valor numérico de las expresiones siguientes:

108. $4x^2 - 3x - 8$ para: 1.º, $x = 5$; 2.º, $x = -3$; 3.º, $x = 7$

109. $\dfrac{5x^3}{2} - \dfrac{6x^2+5}{3} + \dfrac{2x-1}{6}$ para: 1.º, $x = 2$; 2.º, $x = -3$; 3.º, $x = -5$

110. $\dfrac{3-2x}{3} + \dfrac{3(x-2)}{4} + \dfrac{7}{12}$ para: 1.º, $x = -4$; 2.º, $x = 3$; 3.º, $x = -2$

111. $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$ para $x = 2;\ y = \frac{1}{2}$

112. $\sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{2b}}$ para $a = 3;\ b = 8;\ c = 5$

113. $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ para $a = 1;\ b = -2;\ c = -15$

114. $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ para $a = 10;\ b = 8;\ c = 6;\ p = \dfrac{a+b+c}{2}$

Reducir términos semejantes en los polinomios siguientes:

115. $4x^2 - \frac{7}{2} + \frac{3}{5}x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 - 5 + \frac{3}{2}x^3 + 7 - 2x$

116. $8a^2b^2 + 7a^4 + 6a^3b - 5a^4 - 3ab^3 - 2b^4 + ab^3 + 2a^4 - 12a^2b^2 + 3a^4 + 5ab^3 + 5b^4$

117. $3a^2b^3 + 7a^3b^2 - 2a^2b^3 - 5a^3b^2 + 8a^2b^2 - 2b^3 + a^2b^2 - 3b^3$

118. $\frac{2}{5}a^2b + 3a^3 - 4ab^2 + \frac{5}{2}a^2b + \frac{7}{2}b^3 - b^3 + 2ab^2$

119. $\frac{3}{4}x^2y + \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}xy^2 - 7y^3 + \frac{1}{5}xy^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{9}y^3 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{2}{8}xy^2 - \frac{6}{7}x^2y + x^3$

Decir de qué grado son los monomios o polinomios siguientes: 1.°, *con relación a todas sus letras;* 2.°, *respecto de* x.

Cuando se trate de polinomios, dígase también: 1.°, *si son homogéneos;* 2.°, *si son completos o incompletos con relación a* x.

120. a^3x^5b

121. $7x^2y$

122. $8x^2y^3z$

123. $ax^4 - 2a^2x^6$

124. $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2$

125. $2mx + 3x^2z + 7mnx^3$

126. $a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$

127. $2x^2 + xy + 2xz - 3yz - z^2$

128. $18a^3b^4x^5 - 11a^5b^3x^7 + 3a^2b^6x^6$

129. $-x^3y + y^4 + x^2y^2 + x^4$

Reducir y ordenar, con relación a las potencias decrecientes de x, *los polinomios siguientes:*

130. $-\frac{3}{2}x + \frac{4}{5}x - 3x^2 + \frac{x}{6} - \frac{5}{2}x^2 + 5 + 4x^2$

131. $3x^2 + \frac{4}{2} - \frac{5}{3}x - 2x^2 - \frac{3}{2}x^3 + 4 - 2x^2 + 7x$

132. $-\frac{2}{5}x^3y^2 + 3\frac{1}{2}x^2y^3 - \frac{3}{4}x^4 + 5\frac{2}{3}x^2y^3 - \frac{2}{7}x^3y^2 + 2\frac{3}{4}x^4 - x^2y^3$

133. $-3a^2x^3 + 5a^4x - 8ax^4 + 3a^3x^2$

134. $4a^3x^2 - 5ax^6 + 9a^2x + a^3x^2 - 4a^4x^3 + 5x + 7$

135. $a^2b^3x - a^3b^2x^4 + ab^4 - a^4bx^2 - 2a^2b^3x + ab^5x^5 - a^6x^3 + b^6x^6$

136. La altura de un triángulo es a metros y la base mide n metros más que la altura. Escribir la expresión que da la superficie de dicho triángulo.

137. Escribir en el sistema de numeración decimal la expresión de un número de tres cifras x, y, z, y la del número que resulta al invertir el orden de dichas cifras.

138. Expresar que la suma de dos números consecutivos es igual a los $\frac{2}{3}$ del primero.

5. Operaciones con monomios y polinomios

40. Suma de monomios.

Para sumar varios monomios, se escriben unos a continuación de otros y se reducen luego aquellos que sean semejantes.

EJEMPLO. — Sumar los monomios

$$3a^2;\qquad -5ax;\qquad -4x^2;\qquad 7x^2;\qquad -2ax;\qquad -6a^2$$

Tendremos:

$$3a^2 - 5ax - 4x^2 + 7x^2 - 2ax - 6a^2 = 3x^2 - 7ax - 3a^2$$

41. Suma de polinomios.

Para sumar varios polinomios, basta formar un solo polinomio con los términos de todos ellos y reducir luego los términos semejantes que hubiere.

EJEMPLO. — Sumar los polinomios

$$3b^2 - 10ax + 5x^2;\qquad 5ax - 6b^2 - 2x^2;\qquad 10b^2 - 12ax - 6x^2$$

La suma será

$$3b^2 - 10ax + 5x^2 + 5ax - 6b^2 - 2x^2 + 10b^2 - 12ax - 6x^2 = \\ = 7b^2 - 17ax - 3x^2$$

Cuando los polinomios tienen términos semejantes, se facilita la operación escribiéndolos unos debajo de otros, de modo que los términos semejantes se correspondan.

EJEMPLO. — Efectuar la suma

$$(x^4 - 5ax^3 + 6a^2x^2 + a^4) + (-x^4 + 7ax^3 - 7a^2x^2) + (10ax^3 + 2a^2x^2 + 4a^3x - a^4)$$

Dispondremos así la operación:

$$\begin{array}{rrrr} +x^4 - & 5ax^3 + & 6a^2x^2 & + a^4 \\ -x^4 + & 7ax^3 - & 7a^2x^2 & \\ & 10ax^3 + & 2a^2x^2 + & 4a^3x - a^4 \\ \hline & 12ax^3 + & a^2x^2 + & 4a^3x \end{array}$$

42. Diferencia de monomios y polinomios. — En el párrafo 11 definimos la diferencia entre dos números racionales como la suma del minuendo con el opuesto del sustraendo. Esta regla nos servirá asimismo para efectuar cualquier resta algebraica. Es decir:

Para restar dos expresiones algebraicas, bastará sumar a la expresión minuendo la expresión sustraendo con los signos cambiados.

Como el minuendo y sustraendo pueden ser monomios o polinomios, he aquí los casos que pueden presentarse:

1.° *Restar dos monomios.*

a) EJEMPLO de monomios semejantes: $\frac{1}{2}xy - (-\frac{1}{4}xy)$

Tendremos, según la regla anterior:

$$\frac{1}{2}xy - (-\frac{1}{4}xy) = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}xy = \frac{3}{4}xy$$

b) EJEMPLO de monomios no semejantes:

$$(-3a^2b) - (-4bc) = -3a^2b + 4bc$$

2.° *Restar de un monomio un polinomio.*

EJEMPLO:

$$\frac{3}{4}bx - (\frac{3}{8}ax^2 + \frac{1}{8}bx - \frac{1}{4}c) = \frac{3}{4}bx + (-\frac{3}{8}ax^2 - \frac{1}{8}bx + \frac{1}{4}c) = \\ = -\frac{3}{8}ax^2 + \frac{5}{8}bx + \frac{1}{4}c$$

3.° *Restar de un polinomio un monomio.*

EJEMPLO:

$$(0'2a^2 - 3'1ab^2 + 5'6c) - (-4'7ab^2) = (0'2a^2 - 3'1ab^2 + 5'6c) + (+4'7ab^2) = \\ = 0'2\,a^2 + 1'6\,ab^2 + 5'6\,c$$

4.° *Restar dos polinomios.*

EJEMPLO:

$$(4\,a^3 - \tfrac{1}{4}\,b^3 - \tfrac{3}{4}\,a^2b - 2\,c) - (3\,a^3 + \tfrac{7}{8}\,ab - \tfrac{1}{8}\,a^2b - \tfrac{3}{8}\,b^3)$$

Para facilitar la reducción de los términos semejantes, conviene escribir, *ordenados* según una misma letra y uno debajo de otro, el minuendo y el sustraendo, éste con los signos cambiados. Bastará luego efectuar la suma algebraica de los coeficientes y escribir a continuación la correspondiente parte literal. Así:

$$\begin{array}{r} 4\,a^3 - \frac{3}{4}\,a^2b \qquad\quad - \frac{1}{4}\,b^3 - 2\,c \\ -3\,a^3 + \frac{1}{8}\,a^2b - \frac{7}{8}\,ab + \frac{3}{8}\,b^3 \\ \hline a^3 - \frac{5}{8}\,a^2b - \frac{7}{8}\,ab + \frac{1}{8}\,b^3 - 2\,c \end{array}$$

43. Suma y resta combinadas. — Aplicando sucesivamente las reglas dadas para la adición y sustracción de polinomios, podremos practicar estas operaciones cuando se hallan combinadas en la misma expresión.

EJEMPLO. — Efectuar las operaciones indicadas en la siguiente expresión:

$$(x^4-3x^3+x+5)-(5x^4-8x^3-2x^2+7)+(3x^4-5x^2+6x+8)$$

Dispondremos así la operación:

$$\begin{array}{r} x^4-3x^3 \quad\quad +x+5 \\ -5x^4+8x^3+2x^2 \quad\quad -7 \\ 3x^4 \quad\quad -5x^2+6x+8 \\ \hline -x^4+5x^3-3x^2+7x+6 \end{array}$$

44. Supresión e introducción de paréntesis en una expresión algebraica. — Por las reglas referentes a la adición y sustracción de polinomios, podemos escribir las siguientes igualdades:

$$x^2+(a^2-2ab+b^2)=x^2+a^2-2ab+b^2$$
$$x^2-(a^2-2ab+b^2)=x^2-a^2+2ab-b^2$$

que leídas en sentido inverso son:

$$x^2+a^2-2ab+b^2=x^2+(a^2-2ab+b^2)$$
$$x^2-a^2+2ab-b^2=x^2-(a^2-2ab+b^2)$$

Lo mismo sucedería con cualquiera otra expresión. Por consiguiente, diremos:

Todo paréntesis precedido del signo + puede suprimirse, dejando invariables los términos en él encerrados.

Todo paréntesis precedido del signo — puede suprimirse, con tal de que se escriban con signos contrarios los términos encerrados en él.

Podemos encerrar en un paréntesis varios de los términos de un polinomio, escritos con los signos que llevaban si delante del paréntesis colocamos el signo +, y con los signos cambiados si delante ponemos el signo —.

Cuando se trata de suprimir paréntesis que están contenidos unos en otros, conviene empezar por los más interiores.

EJEMPLO. — Suprimir los paréntesis y reducir en la expresión

$$a^2+3a-[4a+7-(2a^2-4a-3)]$$

Se tiene, primeramente,

$$a^2 + 3a - [4a + 7 - 2a^2 + 4a + 3]$$

y luego,

$$a^2 + 3a - 4a - 7 + 2a^2 - 4a - 3 = 3a^2 - 5a - 10$$

45. Observación. — Cuando en una expresión que debe someterse a determinadas operaciones figuran términos contenidos en un paréntesis, se encierra toda ella entre corchetes; y si la expresión que así resulta es también elemento de otra operación, se coloca a su vez entre corchetes o llaves de diversa magnitud.

Así, la expresión

$$7a - \{3a - [4b - (a - 2b)]$$

indica que $a - 2b$ ha de restarse de $4b$, el resultado, de $3a$ y, finalmente, la diferencia que resulte se restará de $7a$.

46. Producto de monomios. — Supongamos que se trata de hallar el producto de los monomios $(+7a^4b^3d)$ y $(-9a^6bc^3d^2)$.

En virtud de las propiedades asociativa y conmutativa de todo producto, podemos asociar por un lado los coeficientes y por otro las partes literales. Los coeficientes se multiplican teniendo en cuenta la regla de los signos, y multiplicaremos los factores literales sustituyéndolos por las potencias cuyos exponentes sean la suma de los exponentes con que figuran las distintas letras en el multiplicando y multiplicador.

EJEMPLOS:

$$(+7a^4b^3d)(-9a^6bc^3d^2) = (+7)(-9)a^4 \cdot a^6 \cdot b^3 \cdot b \cdot c^3 \cdot d \cdot d^2 = -63\,a^{10}b^4c^3d^3$$

$$\left(+\tfrac{3}{4}ax^2\right)(-5a^2xy)\left(-\tfrac{1}{2}axy^2\right) = \tfrac{15}{8}a^4x^5y^3$$

Es decir: *El grado del monomio producto es igual a la suma de los grados de los monomios factores.*

47. Producto de un polinomio por un monomio. — Como consecuencia de la propiedad distributiva de la multiplicación (núm. 18), podemos establecer la siguiente regla:

Para hallar el producto de un polinomio por un monomio, se multiplica cada uno de los términos del polinomio por el monomio y se suman los productos obtenidos.

EJEMPLOS:

$$(3a^2b^2-5a+7b-4)(-6a^3b) = -18\,a^5b^3 + 30\,a^4b - 42\,a^3b^2 + 24\,a^3b$$

$$(\tfrac{1}{2}x^2y - \tfrac{1}{8}xy^2 + \tfrac{3}{8}y^3)(+2xy) = x^3y^2 - \tfrac{1}{4}x^2y^3 + \tfrac{3}{4}xy^4$$

Se deduce de la regla anterior que si el polinomio que se multiplica es un polinomio *reducido* (35), también lo será el polinomio producto. El resultado de multiplicar un polinomio por un monomio es, pues, un polinomio y consta del *mismo número de términos* que el primero.

48. Producto de polinomios. Propiedades. — El producto de dos polinomios corresponde al de dos sumas algebraicas de números racionales (núm. 19). Según esto, podemos enunciar:

Para efectuar el producto de dos polinomios, se multiplican sucesivamente todos los términos del primero por cada uno de los términos del segundo, y se forma luego la suma de los productos obtenidos.

EJEMPLO:

$$(3x^2-2x-1)(4x^2+3x+5) = 12\,x^4 - 8\,x^3 - 4\,x^2 +$$
$$+9\,x^3 - 6\,x^2 - 3\,x + 15\,x^2 - 10\,x - 5 = 12\,x^4 + x^3 + 5\,x^2 - 13\,x - 5$$

Con objeto de facilitar la reducción de los términos semejantes que haya en el producto, se *ordenan* los polinomios con relación a las potencias crecientes, o decrecientes, de una misma letra y se colocan uno debajo de otro. Después se efectúa la multiplicación, escribiendo los productos parciales de modo que se correspondan los términos semejantes.

Así, el producto anterior tomará la siguiente forma:

$$\begin{array}{r}
3x^2 - 2x - 1 \\
4x^2 + 3x + 5 \\
\hline
12x^4 - 8x^3 - 4x^2 \\
+9x^3 - 6x^2 - 3x \\
+15x^2 - 10x - 5 \\
\hline
12x^4 + x^3 + 5x^2 - 13x - 5
\end{array}$$

Cuando el polinomio multiplicando no es completo, se dejan en los productos parciales los claros correspondientes a los términos que faltan.

EJEMPLO. — Hallar el producto

$$(ab^3 - 3a^2b^2 + 2a^4 - b^4)(a^3 + 2b^3 - 4a^2b)$$

Si ordenamos los polinomios con relación a las potencias decrecientes de a tendremos:

$$
\begin{array}{l}
2a^4 - 3a^2b^2 + ab^3 - b^4 \\
\quad a^3 - 4a^2b + 2b^3 \\
\hline
2a^7 \qquad - 3a^5b^2 + \quad a^4b^3 - \quad a^3b^4 \\
\quad - 8a^6b \qquad\quad + 12a^4b^3 - 4a^3b^4 + 4a^2b^5 \\
\qquad\qquad\quad + \quad 4a^4b^3 \qquad\quad - 6a^2b^5 + 2ab^6 - 2b^7 \\
\hline
2a^7 - 8a^6b - 3a^5b^2 + 17a^4b^3 - 5a^3b^4 - 2a^2b^5 + 2ab^6 - 2b^7
\end{array}
$$

Si los factores polinomios son más de dos, se multiplican sucesivamente.

PROPIEDADES. — Como consecuencia de la regla dada para hallar el producto de dos polinomios, se deducen las siguientes propiedades:

1.ª **El grado del producto de dos polinomios es igual a la suma de los grados de los factores.**

2.ª **El producto de dos polinomios homogéneos es otro polinomio homogéneo, cuyo grado es la suma de los grados de los factores.**

3.ª **El término de mayor grado del producto es igual al producto de los términos de mayor grado de los factores; lo mismo sucede con el producto de los términos de menor grado.**

Por consiguiente, el menor número de términos que puede tener el producto de dos polinomios, es dos. Así ocurre en el siguiente ejemplo:

$$
\begin{array}{l}
x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4 \\
x - a \\
\hline
x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x \\
\quad - ax^4 - a^2x^3 - a^3x^2 - a^4x - a^5 \\
\hline
x^5 \qquad\qquad\qquad\qquad - a^5
\end{array}
$$

EJERCICIOS

Sumar los polinomios siguientes y reducir los términos semejantes que resulten:

139. $(2x-a)+(3x+a)$

140. $(-x+a)+(x+a)$

141. $(2a-b)+(3a-b)$

142. $(2x^2-y^2)+(3x^2-2y^2)$

143. $(3'02a^2-1'52b^2)+(0'98a^2-12ab+10'52b^2)$

144. $(1'3a+6'8b-7'2c)+(0'2a-3'1b+5'6c)$

145. $(\frac{1}{2}p+\frac{1}{3}q-\frac{1}{4}r)+(\frac{1}{4}p-\frac{1}{3}q+\frac{1}{2}r)$

146. $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}+\frac{2z^2}{9}\right)+\left(\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{6}-\frac{z^2}{12}\right)$

147. $(2a+3b-4c)+(3a-2b+4c)+(a+5b+6c)$

148. $(4ax-3by+5cz)+(7ax+8by-2cz)+(2ax-2by+cz)$

149. $(2ab+3ca+6abc)+(-5ab+2bc-5abc)+(3ab-2bc-3ca)$

150. $(2x^2-2xy+3y^2)+(4y^2+5xy-2x^2)+(x^2-2xy-6y^2)$

151. $(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b)+(-a+\frac{2}{3}b)+(\frac{3}{4}a-b)$

152. $(-\frac{1}{3}a-\frac{1}{4}b)+(-\frac{2}{3}a+\frac{3}{4}b)+(-2a-b)$

153. $\left(-2a+\frac{5c}{2}\right)+\left(-\frac{a}{3}-2b\right)+\left(\frac{8b}{3}-3c\right)$

154. $\left(-\frac{13a}{8}-\frac{11c}{4}\right)+(2a-3b)+\left(\frac{11b}{5}-c\right)$

Efectuar las diferencias siguientes y simplificar el resultado:

155. $(4a-8b+c)-(a-3b+5c)$

156. $(10a+3b+4c)-(15a-27b+8c)$

157. $(-5x+8y+7z)-(16x-18y-15z)$

158. $(-10bc+ab-4cd)-(-11ab+6cd)$

159. $(ab+cd+ac+bd)-(-ab+cd-ac+bd)$

160. $(3ab+5cd-4ac-6bd)-(3ab+6cd-3ac-5bd)$

161. $(-2x^3-x^2-3x+2)-(x^3-x+1)$

162. $(-8x^2y+15xy^2+10xyz)-(4x^2y-6xy^2-5xyz)$

163. $(\frac{3}{4}x+y+z)-(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z)$

164. $(0'3a-5'2b+2'7c)-(-1'2a-6'9b+8'3c)$

165. $\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{7}y + \frac{1}{10}z\right) - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{4}{7}y - \frac{1}{10}z\right)$

166. $\left(-\frac{2}{3}x - \frac{3}{5}y - 5z\right) - \left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{5}y - \frac{11}{3}z\right)$

Dados los polinomios

$P = 2x^3 - 3x^2 + 4x$ $\qquad$ $Q = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 1$

$R = 4x^5 - 2x^3 + 3x - 1$ $\qquad$ $S = 3x^2 + 2x - 5$

calcular:

167. $(P+Q) - (R+S)$ $\qquad$ **168.** $(P-Q) + (R-S)$ $\qquad$ **169.** $P - Q - R + S$

Suprimir los paréntesis en las siguientes expresiones y reducir términos semejantes:

170. $[3a^2 - 5a^2b + 7b^3 - (2a^3 - 6b^3)] - [ab^2 - (5a^3 + 2a^2b)]$

171. $(m+n+p) + (m-n-p) - (p-n-m) - (n+p-m)$

172. $[a+b-3-c-(3a-2a+5c-7)] - [9-(5a+11b-7c)]$

173. $a - b + c - [3a-2b+(a-b)-(a+b)] - c$

174. $3x - \{2y-z-[3y+z-x-(y+z-x)-y]+z\} + y$

175. $a + b - \{-[a+b-(c+x)] - [3a-(c-x+a)-b]+4a\}$

176. $1 - \{1-[1-(1-x)]\}$

177. $a + b - \left[c+a-\{b+c-[a+b-\{c+a-(b+c-a)\}]\}\right]$

178. $b + c - \left[a+b-\{c+a-[b+c-\{a+b-(c+a-b)\}]\}\right]$

179. $x - [x-\{x-[x-(x+x)]\}]$

En las expresiones siguientes, introducir en un paréntesis, que lleve delante el signo +, todos los términos que contienen x *o* y, *y en otro, precedido del signo −, introducir los términos restantes:*

180. $x^2 - b^2 - 4b^2 + 2y^2 - a^2 - 2xy - y^2$

181. $-4ab + x^2 - b^2 + 4y^2 - 4a^2 - 4xy$

182. $4x^2 - a^2 - 8xy - 4 + 4a + 4y^2$

183. $x^2 - 9b^2 - 10xy + 36ab - 36a^2 + 25y^2$

184. $4ab - 4a^2 + x^2 + 4xy - b^2 + 4y^2$

185. $x^2 - 16xy - y^2 + 16p + 6xy^2 - 6x$

186. $x^2 + a^2 + 2ab + 8xy + 2bc + 16y^2 - 2ac - b^2 - c^2$

Efectuar los productos indicados:

187. $5x^2 \cdot 7x^5$
188. $4a^3 \cdot 5a^8$
189. $7ab \cdot 8a^3b^2$
190. $6xy^2 \cdot 5x^3$
191. $8a^3b \cdot b^5$
192. $2ab \cdot 3ac^3$
193. $2a^3b^3 \cdot 2a^3b^3$
194. $5a^2b \cdot 2a$
195. $4a^2b^3 \cdot 7a^5$
196. $5a^4b^3 \cdot x^2y^2$
197. $x^3y^3 \cdot 6a^2x^4$
198. $abc \cdot xyz$
199. $5a^2x \cdot 8cx$
200. $3a^4b^7x^3 \cdot 5a^3bx$
201. $4a^3bx \cdot 7b^2x^4$

202. $(5x+3y)\,2x^2$
203. $(a^2+b^2-c^2)\,a^3b$
204. $(bc+ca-ab)\,abc$
205. $(5a^2+3b^2-2c^2)\,4a^2bc^3$
206. $(5x^2y+xy^2-7x^3y^2)\,3x^3$
207. $(6x^3-5x^2y+7xy^2)\,8x^3y^3$
208. $(6a^3bc-7ab^2c^2)\,a^2b^2$
209. $(2a-3b+4c)\left(-\frac{3}{2}a\right)$
210. $(3x-2y-4)\left(-\frac{5}{6}x\right)$
211. $\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{6}b-c\right)\frac{3}{8}ax$

212. $(2x-3)(x+8)$
213. $(2x+3)(x-8)$
214. $(x-5)(2x-1)$
215. $(2x-5)(x-1)$
216. $(3x-5)(2x+7)$
217. $(5x-6)(2x+3)$
218. $(3x+5)(2x-7)$
219. $(5x+6)(2x-3)$
220. $(3x-5y)(3x-5y)$
221. $(a-2b)(a+3b)$

222. $(3a-6b)(a-8b)$
223. $(a-7b)(a+8b)$
224. $(a-9b)(a+5b)$
225. $(x+a)(x-b)$
226. $(3a-3b)(a-8b)$
227. $(x-a)(x+b)$
228. $(x-2a)(x+3b)$
229. $(ax-by)(ax+by)$
230. $(xy-ab)(xy+ab)$
231. $(2pq-3r)(2pq+3r)$

232. $(x^4-x^2y^2+y^4)(x^2+y^2)$
233. $(x^3+xy+y^2)(x-y)$
234. $(16a^2+12ab+9b^2)(4a-3b)$
235. $(a^2x-ax^2+x^3-a^3)(x+a)$

6. División algebraica

49. Cociente de dos monomios. — Supongamos que se trata de hallar el cociente de dividir $-15\,a^3b^4c^2d$ por $3\,a^2b^2c$.

El cociente entero, si existe, será un monomio, ya que, de lo contrario, es decir, si fuera un polinomio, al multiplicarlo por el divisor, daría un polinomio (47), y no el dividendo.

Si designamos al cociente por C, podremos escribir:

$$3\,a^2b^2c \times C = -15\,a^3b^4c^2d$$

Ahora bien, de esta igualdad, teniendo en cuenta la regla de la multiplicación de monomios, se deduce:

1.° El coeficiente de C multiplicado por 3 es igual a -15; luego dicho coeficiente es $-15 : 3 = -5$.

2.° El producto $-15\,a^3b^4c^2d$ contendrá todas las letras que figuran en el factor $3\,a^2b^2c$ y, además, las que formen parte de C, cada una de ellas con exponente igual a la suma de los exponentes que tengan en dichos dos factores; es decir, que la parte literal de C será ab^2cd.

El cociente buscado es, por consiguiente, $-5\,ab^2cd$.

EJEMPLOS:

$$(-3a^4bc^3x^5) : (-5a^3cx^2) = \frac{3}{5}\,abc^2x^3$$

$$(+\tfrac{1}{3}\,a^4b^3cx^2) : (-\tfrac{3}{4}\,ab^2x) = -\frac{4}{9}\,a^3bcx$$

50. Observación. — Para que el cociente de dos monomios sea un monomio *entero*, es necesario que el dividendo contenga todas las letras del divisor, con exponentes iguales o mayores que en éste.

Por ejemplo, el monomio $5\,a^2b^3c$ no es divisible por el monomio $9\,a^3bd$, debiéndonos limitar a expresar el cociente por la *fracción*

$$\frac{5\,a^2b^3c}{9\,a^3bd}$$

que luego podrá *simplificarse*.

51. Cociente de un polinomio por un monomio. — Sea, por ejemplo, dividir el polinomio $9\,a^3b^2c + 12\,a^2b^3c^2 - 18\,ab^4c^3d$ por el monomio $3\,ab^2c$.

En virtud de la propiedad distributiva de la división (párrafo 21), podremos escribir:

$$(9a^3b^2c + 12a^2b^3c^2 - 18ab^4c^3d) : (3ab^2c) =$$

$$= \frac{9\,a^3b^2c}{3\,ab^2c} + \frac{12\,a^2b^3c^2}{3\,ab^2c} - \frac{18\,ab^4c^3d}{3\,ab^2c} = 3\,a^2 + 4\,abc - 6\,b^2c^2d$$

Esta expresión es, en efecto, el cociente pedido, puesto que

$$(3a^2 + 4abc - 6b^2c^2d)\,(3ab^2c) = 9\,a^3b^2c + 12\,a^2b^3c^2 - 18\,ab^4c^3d$$

De aquí, que digamos:

Para dividir un polinomio por un monomio, se divide cada término del polinomio por el monomio y se escriben unos a continuación de otros los cocientes hallados, con sus correspondientes signos.

EJEMPLOS:

$$(ax^4 - a^2x^3 + a^3x^2) : (-ax^2) = -x^2 + ax - a^2$$

$$(-27x^4y^5z^6 - 45x^5y^4z^3 + 2x^6y^7z^4) : (-9x^3y^3z^2) =$$

$$= 3\,xy^2z^4 + 5\,x^2yz - \frac{2}{9}\,x^3y^4z^2$$

52. Observación. — La condición para que exista cociente *entero* en la división de un polinomio por un monomio, es que todos los términos del polinomio sean divisibles por el monomio, es decir, se necesita que cada uno de los términos del dividendo contenga todas las letras del divisor, con exponentes iguales o mayores que en éste.

53. Cociente entero de dos polinomios. — Supuestos dos polinomios A y B, no siempre es posible encontrar una expresión *entera* cuyo producto por B sea igual a A.

Recordemos que, dados cuatro números naturales, a, b, c y r, si satisfacen las dos condiciones

$$a = b \cdot c + r, \qquad r < b,$$

decimos que al dividir a por b, se obtiene c por cociente entero y r de resto.

Por analogía con la Aritmética, podemos admitir en Álgebra la siguiente definición:

Dividir un polinomio A *por otro* B, *ambos ordenados según las potencias decrecientes de una misma letra, es hallar dos expresiones enteras* C *y* R, *tales que se verifique la igualdad*

$$A = B \cdot C + R$$

en donde R *ha de ser de grado inferior al del divisor* B, *respecto de la letra ordenatriz.*

Las expresiones C y R se denominan, respectivamente, *cociente* y *resto* de la división.

Si R es nulo, se dice que la división es *exacta.*

Veamos cómo se practica la operación. Para facilitar el razonamiento que sigue, supondremos ya efectuada la división del polinomio

$$A = 6x^5 + 5x^4 - 25x^3 + 31x^2 - 12x + 5$$

por el polinomio $B = 2x^2 - 3x + 2$, ambos ordenados con relación a las potencias decrecientes de x.

$$\begin{array}{rl|l}
A = & 6x^5 + 5x^4 - 25x^3 + 31x^2 - 12x + 5 & 2x^2 - 3x + 2 = B \\
 & -6x^5 + 9x^4 - 6x^3 & \hline \\
A_1 = & \quad + 14x^4 - 31x^3 + 31x^2 - 12x + 5 & 3x^3 + 7x^2 - 5x + 1 = C \\
 & \quad - 14x^4 + 21x^3 - 14x^2 & \\
\hline
A_2 = & \quad - 10x^3 + 17x^2 - 12x + 5 & \\
 & \quad + 10x^3 - 15x^2 + 10x & \\
\hline
A_3 = & \quad + 2x^2 - 2x + 5 & \\
 & \quad - 2x^2 + 3x - 2 & \\
\hline
R = & \quad + x + 3 &
\end{array}$$

Hemos dividido $6x^5$, primer término de A, por $2x^2$, primer término de B obteniendo de este modo el cociente

$$6x^5 : 2x^2 = 3x^3$$

Luego, hemos multiplicado este cociente $3x^3$ por el divisor B, y el producto obtenido se ha restado de A.

Si el resto hubiera sido nulo, o de grado inferior al divisor, el monomio $3x^3$ sería el cociente de los polinomios propuestos; en todo caso, dicho resto será de menor grado que el polinomio A. Así, en nuestro ejemplo nos ha resultado un polinomio A_1, que vale

$$A_1 = 14x^4 - 31x^3 + 31x^2 - 12x + 5,$$

debiendo verificarse que

$$A = 3x^3 \cdot B + A_1 \qquad [1]$$

Se ha dividido luego $14x^4$, primer término del resto A_1 por $2x^2$, primero del divisor B. El cociente obtenido ha sido

$$14x^4 : 2x^2 = 7x^2$$

Después de multiplicar este cociente $7x^2$ por el divisor B y restar el producto hallado del primer resto A_1, hemos obtenido una diferencia A_2 que es de menor grado que A_1. El valor de esta diferencia es

$$A_2 = -10x^3 + 17x^2 - 12x + 5,$$

y se ha de cumplir que

$$A_1 = 7x^2 \cdot B + A_2 \qquad [2]$$

Dividiendo después $-10x^3$, primer término del segundo resto A_2, por $2x^2$, primero del divisor B, ha resultado:

$$-10x^3 : 2x^2 = -5x$$

Multiplicando este cociente $(-5x)$ por el divisor B y restando el producto, del resto anterior A_2, se ha obtenido una nueva diferencia A_3, que es de menor grado que A_2. El valor de A_3 es

$$A_3 = 2x^2 - 2x + 5,$$

de modo que

$$A_2 = (-5x) \cdot B + A_3 \qquad [3]$$

Finalmente, hemos dividido $2x^2$, primer término del tercer resto A_3, por $2x_2$, primero del divisor, obteniéndose

$$2x^2 : 2x^2 = 1$$

Al multiplicar este cociente 1 por el divisor B y restar el producto resultante, del resto anterior A_3, se ha obtenido la diferencia R, que es ya de menor grado que el divisor B, por lo cual hemos *detenido* la operación.

El valor de R es

$$R = x + 3,$$

y se ha de verificar que

$$A_3 = 1 \cdot B + R \qquad [4]$$

Ahora bien, si sumamos miembro a miembro las igualdades [1], [2], [3] y [4], tendremos:

$$A + A_1 + A_2 + A_3 = 3x^3 \cdot B + A_1 + 7x^2 \cdot B + A_2 + (-5x)B + A_3 + B + R$$

Restando, de los dos miembros de esta igualdad, la suma $A_1 + A_2 + A_3$ y sacando factor común a B, en el segundo miembro, resulta:

$$A = (3x^3 + 7x^2 - 5x + 1)B + R,$$

igualdad que demuestra, según la definición dada anteriormente, que el polinomio $3x^3 + 7x^2 - 5x + 1$ es el cociente de A por B y $R = x + 3$, el resto de la división.

54. Observaciones. — 1.ª El grado del cociente es igual a la diferencia de los grados del dividendo y el divisor, lo cual es una consecuencia inmediata de lo dicho en la multiplicación (48, 1.ª propiedad).

2.ª Si el dividendo y el divisor son homogéneos, el cociente también lo será.

3.ª Cuando el dividendo carece de alguna potencia de la letra ordenatriz, se dejarán en él los claros correspondientes, para dar cabida a los términos de aquel grado que resulten luego en las multiplicaciones y sustracciones sucesivas.

4.ª En la práctica, no se copian en cada resto parcial todos los términos sobrantes del dividendo, si bien mentalmente se consideran los polinomios totales.

Veamos un ejemplo, en el que se han tenido presentes las dos últimas observaciones.

Efectuar la división siguiente:

$$(3x^4 + 4x^2 - 5x + 3) : (x^2 - 2x + 3)$$

$$\begin{array}{r|l}
3x^4 + 4x^2 - 5x + 3 & x^2 - 2x + 3 \\
\cline{2-2}
-3x^4 + 6x^3 - 9x^2 & 3x^2 + 6x + 7 \\
\cline{1-1}
+ 6x^3 - 5x^2 & \\
- 6x^3 + 12x^2 - 18x & \\
\cline{1-1}
+ 7x^2 - 23x & \\
- 7x^2 + 14x - 21 & \\
\cline{1-1}
- 9x - 18 &
\end{array}$$

55. Relaciones entre los elementos de una división entera. — Según acabamos de ver (53), si representamos por C al cociente entero de dividir el polinomio A por el polinomio B, y por R al resto de la división, se ha de verificar la igualdad

$$A = B \cdot C + R$$

debiendo ser el grado de la expresión R inferior al de la expresión B, respecto de la letra ordenatriz.

56. Cociente exacto de dos polinomios. Fracción algebraica. — *Dados dos polinomios* A *y* B, *denominamos cociente exacto del primero por el segundo a la fracción* $\frac{A}{B}$.

Si designamos por C al cociente entero de dicha división y por R al resto, tendremos:

$$A = B \cdot C + R$$

de donde, dividiendo los dos miembros por B, resulta

$$\frac{A}{B} = C + \frac{R}{B}$$

es decir, que el cociente exacto de dos polinomios es igual a su cociente entero, más una fracción que tiene por numerador el resto de la división y por denominador, el divisor.

FRACCIÓN ALGEBRAICA. — *Llamamos fracción algebraica al cociente indicado de dos expresiones algebraicas enteras.*

Si A es la expresión dividendo y B la expresión divisor, la fracción vendrá representada por $\frac{A}{B}$. El dividendo y el divisor se llaman respectivamente, numerador y denominador de la fracción.

Siendo por definición $\frac{A}{B} = A : B$, se deduce que $\frac{A}{B} \times B = A$, lo cual indica que $\frac{A}{B}$ es el cociente *exacto* de dividir la expresión A por la expresión B.

EJEMPLOS de fracciones algebraicas:

$$\frac{2\,ab}{c\,d}; \qquad \frac{x - y}{x + y}; \qquad \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$$

Una fracción algebraica sólo toma valores numéricos determinados para aquellos valores de sus letras que no anulen al denominador. Así, en la fracción del último ejemplo, pueden asignarse a x los valores que se deseen, excepto los números -1 y $+1$ que, como se ve, anulan al denominador.

EJERCICIOS

Efectuar las divisiones siguientes:

236. $(a^4x^3) : (-a^2x^3)$

237. $(12a^6b^6c^6) : (-3a^4b^2c)$

238. $(15x^5y^7z^4) : (5x^2y^2z^2)$

239. $(-48a^9) : (-8a^3)$

240. $(63a^7b^8c^3) : (9a^5b^5c^3)$

241. $(-72a^3b^5c^7) : (8abc)$

242. $(132x^3y^7) : (12x^2y^2)$

243. $(28a^4b^3) : (-4a^3b)$

244. $(-50y^3x^3) : (-5x^3y)$

245. $(10x^7 - 8x^6 + 3x^4) : x^3$

246. $(15x^5 - 25x^4) : (-5x^3)$

247. $(34x^3y^2 - 51x^2y^3) : (17xy)$

248. $(4x^4y^4 - 8x^3y^2 + 6xy^3) : (-2xy)$

249. $(-3a^2bc + 7ab^2c) : (-abc)$

250. $(4x^2 + x - 14) : (x + 2)$

251. $(12a^2 - 7ax - 12x^2) : (3a - 4x)$

252. $(15a^2 + 17ax - 4x^2) : (3a + 4x)$

253. $(12a^2 - 11ac - 36c^2) : (4a - 9c)$

254. $(9a^2 + 6ac - 35c^2) : (3a + 7c)$

255. $(60x^2 - 4xy - 45y^2) : (10x - 9y)$

256. $(96x^2 - 15y^2 - 4xy) : (12x - 5y)$

257. $(7x^3 + 96x^2 - 28x) : (7x - 2)$

258. $(100x^3 - 3x - 13x^2) : (3 + 25x)$

259. $(27x^3 + 9x^2 - 3x - 10) : (3x - 2)$

260. $(x^2 + 7x + 12) : (x + 3)$

261. $(x^2 + 6x + 9) : (x + 3)$

262. $(a^2 + 3a + 2) : (a + 2)$

263. $(a^2 - 5a + 4) : (a - 4)$

264. $(b^2 + 13b + 42) : (b + 6)$

265. $(x^2 - 14x + 49) : (x - 7)$

266. $(x^2 - 2x + 1) : (x - 1)$

267. $(a^2 - 15a + 54) : (a - 9)$

268. $(y^2 + 13y + 36) : (y + 4)$

269. $(2x^2 - 3x - 2) : (2x + 1)$

270. $(10x^2 - 14x - 12) : (2x - 4)$

271. $(2x^2 + 3x - 2) : (x + 2)$

272. $(3x^2 - x - 14) : (x + 2)$

273. $(9x^2 - 3x - 2) : (3x - 2)$

274. $(10x^2 - 14x - 12) : (5x + 3)$

275. $(4 + 4x + x^2) : (2 + x)$

276. $(1 - 5x + 6x^2) : (1 - 3x)$

277. $(9 - 6x + x^2) : (3 - x)$

278. $(3a^2 - 8a + 4) : (3a - 2)$

279. $(25 - 30a + 9a^2) : (5 - 3a)$

280. $(x^3 - x^2 - 9x - 12) : (x^2 + 3x + 3)$

281. $(2y^3 - 3y^2 - 6y - 1) : (2y^2 - 5y - 1)$

282. $(6a^3 - a^2 - 14a + 3) : (3a^2 + 4a - 1)$

283. $(6b^5 - 13b^4 + 4b^3 + 3b^2) : (3b^3 - 2b^2 - b)$

284. $(x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 19x^2) : (x^3 - 7x + 5)$

285. $(192 - x^4 + 128x + 4x^2 - 8x^3) : (16 - x^2)$

286. $(14x^4 + 45x^3y + 78x^2y^2 + 45xy^3 + 14y^4) : (2x^2 + 5xy + 7y^2)$

287. $(x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^3 + x^2 - y^3) : (x^3 - x - y)$

288. $(x^5 + x^4y - x^3y^2 + x^3 - 2xy^2 + y^3) : (x^2 + xy - y^2)$

289. $(a^9 - b^9) : (a^3 - b^3)$

290. $(x^9 - y^9) : (x^2 + xy + y^2)$

291. $(x^7 - 2y^{14} - 7x^5y^6 - 7xy^{12} + 14x^3y^8) : (x - 2y^2)$

292. $(a^3 + 3a^2b + b^3 - 1 + 3ab^2) : (a + b - 1)$

293. $(x^8 - y^8) : (x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$

294. $(a^{12} + 2a^6b^6 + b^{12}) : (a^4 + 2a^2b^2 + b^4)$

295. $(1 - a^3 - 8x^3 - 6ax) : (1 - a - 2x)$

296. $\left(\frac{1}{8}a^3 - \frac{9}{4}a^2x + \frac{27}{2}ax^2 - 27x^3\right) : \left(\frac{1}{2}a - 3x\right)$

297. $\left(\frac{1}{27}a^3 - \frac{1}{12}a^2 + \frac{1}{16}a - \frac{1}{64}\right) : \left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{4}\right)$

298. $\left(\frac{3}{4}a^2c^3 + \frac{6}{125}a^5\right) : \left(\frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{2}ac\right)$

7. Potenciación algebraica

57. Potencia de un monomio. — Un monomio es un producto de factores. Por consiguiente, para hallar la potencia de un monomio, bastará aplicar la regla dada para obtener la potencia de un producto indicado (24, 5.ª).

Así, suponiendo que se trata de hallar la cuarta potencia del monomio $-3a^2b^3c$, tendremos:

$$(-3a^2b^3c)^4 = (-3)^4 \cdot (a^2)^4 \cdot (b^3)^4 \cdot c^4 = 81\,a^8b^{12}c^4$$

de donde se deduce la siguiente regla:

Para elevar un monomio a una potencia, se eleva el coeficiente a dicha potencia y se multiplican los exponentes de las letras por el exponente de la potencia.

EJEMPLOS:

$$(-2x^3y)^5 = -32\,x^{15}y^5; \qquad \left(\tfrac{1}{3}\,a^2b^3\right)^3 = \tfrac{1}{27}\,a^6b^9$$

58. Cuadrado de un binomio. — Sea el binomio $a + b$, en donde a y b representan dos monomios cualesquiera. Por definición de potencia,

$$(a+b)^2 = (a+b)\,(a+b)$$

Aplicando la regla de la multiplicación de polinomios, se tiene:

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

Por tanto,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Este resultado puede expresarse así:

El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término, más el duplo del producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

EJEMPLOS:

$$(4a+3x)^2 = 16a^2 + 24ax + 9x^2$$
$$(4a-3x)^2 = 16a^2 - 24ax + 9x^2$$
$$(-2x^2+5y)^2 = 4x^4 - 20x^2y + 25y^2$$
$$(-2x^2-5y)^2 = 4x^4 + 20x^2y + 25y^2$$

59. Producto de una suma de monomios por su diferencia. — Sea multiplicar $a + b$ por $a - b$, representando por a un monomio cualquiera y por b otro monomio.

Según las reglas de la multiplicación de polinomios, tendremos:

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad - ab - b^2 \\ \hline a^2 \qquad - b^2 \end{array}$$

Luego,

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Por tanto, diremos:

El producto de la suma de dos monomios por su diferencia es igual al cuadrado del primero, menos el cuadrado del segundo.

EJEMPLOS:

$$(a+1)(a-1) = a^2 - 1$$
$$(5a+3b^2)(5a-3b^2) = 25a^2 - 9b^4$$
$$(x^2+y^2)(x^2-y^2) = x^4 - y^4$$

60. Cubo de un binomio. — Sea el binomio $a + b$, en donde a y b representan dos monomios cualesquiera, positivos o negativos.

Según la definición de potencia, podemos escribir:

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)^2(a+b)$$

Reemplazando $(a+b)^2$ por su equivalente $a^2 + 2ab + b^2$ y efectuando la multiplicación arriba indicada, se tiene:

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

Luego,

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

resultado que puede expresarse así:

El cubo de un binomio es igual al cubo del primer término, más el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.

EJEMPLOS:

$$(2a+b)^3 = (2a)^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot b + 3 \cdot 2a \cdot b^2 + b^3 = \\ = 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$$

$$(2a-b)^3 = (2a)^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot (-b) + 3 \cdot 2a \cdot (-b)^2 + (-b)^3 = \\ = 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$$

$$(-4x^2+1)^3 = (-4x^2)^3 + 3 \cdot (-4x^2)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (-4x^2) \cdot 1^2 + 1^3 = \\ = -64x^6 + 48x^4 - 12x^2 + 1$$

$$(-4x^2-1)^3 = (-4x^2)^3 + 3 \cdot (-4x^2)^2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-4x^2) \cdot (-1)^2 + (-1)^3 = \\ = -64x^6 - 48x^4 - 12x^2 - 1$$

61. Cuadrado de un polinomio. — Dado un polinomio, siempre es posible considerarle como suma de dos expresiones algebraicas. Ahora bien, aplicando luego a esa suma, cuantas veces sea preciso, la fórmula del cuadrado de un binomio, tendremos el cuadrado del polinomio en cuestión.

En efecto: Sea, primeramente, el trinomio $T = a + b + c$, en el que, como siempre, a, b y c representan monomios cualesquiera. Considerando a la suma $b + c$ como un solo término, se puede aplicar la fórmula del cuadrado de un binomio, o sea:

$$T^2 = (a+b+c)^2 = [a+(b+c)]^2 = a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2 = \\ = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$$

Por tanto:

$$T^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Supongamos ahora el polinomio $P = m - n + r - s$, que queremos elevar al cuadrado. Considerando a la diferencia $m - n$ como un solo término, y haciendo lo mismo con $r - s$, podremos escribir:

$$P^2 = (m-n+r-s)^2 = [(m-n)+(r-s)]^2 =$$
$$= (m-n)^2 + 2(m-n)(r-s) + (r-s)^2 =$$
$$= m^2 - 2mn + n^2 + 2mr - 2ms - 2nr + 2ns + r^2 - 2rs + s^2$$

Es decir:

$$P^2 = m^2 + n^2 + r^2 + s^2 - 2mn + 2mr - 2ms - 2nr + 2ns - 2rs$$

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, podemos enunciar la siguiente regla:

El cuadrado de un polinomio es igual a la suma de los cuadrados de todos sus términos, más el duplo de cada uno de los productos que pueden obtenerse con esos mismos términos, tomados dos a dos.

EJEMPLOS:

$$(2a+3b+c)^2 = 4a^2 + 9b^2 + c^2 + 12ab + 4ac + 6bc$$
$$(a^2+2b-3c)^2 = a^4 + 4b^2 + 9c^2 + 4a^2b - 6a^2c - 12bc$$

62. Operación de sacar factor común. — Cuando todos los términos de un polinomio tengan un factor común, puede ponerse éste de manifiesto escribiéndolo como factor de un paréntesis, en cuyo interior se escribe el polinomio que resulta al dividir todos los términos del polinomio propuesto por el factor común.

EJEMPLO. — Sacar factor común en el polinomio

$$6ab^3 - 9a^2b^4c^2 + 15a^3b^5c^3.$$

Las letras a y b están en todos los términos del polinomio, siendo 1 y 3, respectivamente, los menores exponentes que en ellos llevan; como

además se verifica que m. c. d. (6, 9 y 15) = 3, el monomio $3ab^3$ será el factor común pedido, y podremos escribir:

$$6ab^3 - 9a^2b^4c^2 + 15a^3b^5c^3 = 3ab^3(2 - 3abc^2 + 5a^2b^2c^3)$$

A veces el factor común es un *polinomio*. Consideremos, por ejemplo, la expresión

$$a^2 - ab - ac + bc$$

Si sacamos a factor común del primero y segundo términos y c de los términos tercero y cuarto, resulta:

$$a(a-b) - c(a-b)$$

y observando que el factor $a - b$ se repite en los dos términos de esta diferencia, tendremos finalmente:

$$a(a-b) - c(a-b) = (a-b)(a-c)$$

63. Descomposición factorial de polinomios en casos sencillos. — Para la simplificación de fracciones algebraicas y para la resolución de ecuaciones, es muy útil saber transformar un polinomio en producto de factores.

Esta descomposición factorial de polinomios no siempre es posible, y aun en los casos en que es factible, puede ofrecer dificultades. Expondremos solamente el método a seguir en los casos más sencillos.

1.° *Separación de factores comunes.* — Cuando todos o parte de los términos de un polinomio contienen uno o varios factores comunes, se comenzará por sacar dichos factores, aplicando para ello la regla expuesta en el párrafo anterior.

EJEMPLOS:

$$6a^2x^3 - 12a^2x^2 - 18a^3x = 6a^2x(x^2 - 2x - 3a)$$

$$ax - bx - 3by + 3ay = x(a-b) + 3y(a-b) = (a-b)(x+3y)$$

2.° *Descomposición de un trinomio cuadrado perfecto.* — Recordemos (58) que

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)(a+b) = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)(a-b) = (a-b)^2$$

es decir:

Todo trinomio formado por dos cuadrados y el doble producto de las bases, es el cuadrado de la suma o diferencia de éstas.

EJEMPLOS:

$$9x^2 + 12xy + 4y^2 = (3x+2y)^2; \qquad a^2 - a + \tfrac{1}{4} = (a - \tfrac{1}{2})^2$$

$$-16x^2 + 8xy^2 - y^4 = -(16x^2 - 8xy^2 + y^4) = -(4x - y^2)^2$$

3.° *Descomposición de un binomio formado por una diferencia de cuadrados.* — Según hemos visto en el párrafo 59,

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Es decir:

La diferencia de los cuadrados de dos monomios es igual al producto de la suma de dichos monomios por su diferencia.

EJEMPLOS:

$$a^2 - 1 = (a+1)(a-1); \qquad 9a^2b^2 - x^2 = (3ab+x)(3ab-x)$$

$$x^4 - y^2 = (x^2+y)(x^2-y); \qquad a^4 - b^4 = (a^2+b^2)(a^2-b^2) = (a^2+b^2)(a+b)(a-b)$$

EJERCICIOS

Efectuar las operaciones que se indican:

299. $(-\frac{1}{2}ab^2x^3)^3$

300. $(-2a^2b^3cx^2yz^2)^4$

301. $(x-7)^2$

302. $(a+5)^2$

303. $(2a-1)^2$

304. $(a^2+2)^2$

305. $(a^2+b^2)^2$

306. $(2a^2-3b^3)^2$

307. $(5a^4b-7ab^3)^2$

308. $(2a+\frac{1}{4})^2$

309. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$

310. $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2$

311. $(a+1)^2-(a^2+1)$

312. $(a+n)^2-(a^2+n^2)$

313. $(x+1)^2-(x-1)^2$

314. $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$

315. $\left(\frac{7c}{3}+\frac{3b}{2}\right)\left(\frac{7c}{3}-\frac{3b}{2}\right)$

316. $(9a^3b+5a^2c)(9a^3b-5a^2c)$

317. $[(a+b)+7][(a+b)-7]$

318. $[8+(m-n)][8-(m-n)]$

319. $(a+1)^3$

320. $(a-1)^3$

321. $(a-3b)^3$

322. $(x+5)^3$

323. $(4x^2-1)^3$

324. $(x^2-y^2)^3$

325. $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^3$

326. $(11x^2-1)^3$

327. $(a+1)^3-a^3$

328. $(a+b)^3-(a-b)^3$

329. $(x-1)^3-(x+1)^3$

330. $(a-b+c)^2$

331. $(2a-3b+4c)^2$

332. $(a-b+c-d)^2$

333. $(2a^2-3b^2+4c^4)^2$

334. $(ma-nb-pc)^2$

335. $\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}-1\right)^2$

336. $(x^6-x^3+1)^2$

337. $(a+b-c)^2-(a^2+b^2-c^2)$

338. $(a+b-c)^2-(a+b)^2-c^2$

¿Cuál es el término que ha de añadirse a los binomios siguientes para que resulte un trinomio cuadrado perfecto?

339. $1-2a$

340. x^2-16xy

341. $a^2x^4y^2+8axyz$

342. x^2+z^2

343. $1+4x^2$

344. $4a^2+4b^2$

345. $25x^2+100$

346. $\frac{x^2}{4}+1$

347. $9x^2+\frac{1}{4}$

348. $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{25}$

Sacar factor común en las expresiones siguientes:

349. $460a^2x^5y^4-130a^4x^5y^3$

350. $152x^2-38x$

351. $18x^5y^4z^3+30x^4y^3z^5$

352. $x(a+b)+y(a+b)$

353. $2x^3+ax^2+ax$

354. $y^{15}+y$

355. $3y^{11}-12y^8+6y^5$

356. $\frac{\pi R^2h}{3}+\frac{\pi r^2h}{3}$

357. $\frac{n^2d}{4}-\frac{nd^2}{8}$

358. $\frac{\pi R^2h}{3}-\frac{\pi r^2h}{3}$

Descomponer en factores los polinomios siguientes:

359. $2x^2y^3 - 6x^2y^2 + 2xy^3$

360. $6x^3 - 9x^2y + 12xy^2$

361. $5x^5 - 10a^2x^3 - 15a^3x$

362. $7a - 7a^3 + 14a^4$

363. $38a^3x^5 + 57a^4x^2$

364. $a^2 + ab + ac + bc$

365. $a^2c^2 + acd + abc + bd$

366. $2x + cx + 2c + c^2$

367. $5a + ab + 5b + b^2$

368. $ax - bx - az + bz$

369. $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{4y^2}{x^2} - 4$

370. $16x^2y^4 - 88xy^2z + 121z^2$

371. $-49 - 14x - x^2$

372. $8x^2 - 24xy + 18y^2$

373. $75a^2 + 90ax + 27x^2$

374. $\dfrac{9y^2}{x^2} + \dfrac{x^2}{9y^2} - 2$

375. $x^6 + 12x^3 + 36$

376. $y^{12} + 4y^6 + 4$

377. $64a^4 + 16a^2b^2 + b^4$

378. $64a^2 + 32a + 4$

379. $y^2 - 25x^2$

380. $36x^2 - 25b^2$

381. $a^2 - 4b^2$

382. $9a^4 - 121$

383. $81a^4 - 49x^4$

384. $(x+y)^2 - x^2$

385. $x^2 - (x-y)^2$

386. $(3a+1)^2 - (2a-1)^2$

387. $(2x-3)^2 - (3x-5)^2$

388. $(2a+b-c)^2 - (a-b+c)^2$

389. $a^2 - 1$

390. $a^4 - b^4$

391. $(a+1)^2 - 1$

392. $a^{16} - b^{16}$

393. $(m+n)^2 - m^2$

394. $16a^4 - 9a^6$

395. $(a-1)^2 - (a-2)^2$

396. $a^2 + a + \frac{1}{4}$

397. $1 + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

398. $(a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2$

399. $a^{10} - a^8 + a^6 - a^4$

400. $(a+b+c)^2 - (a-b-c)^2$

8. Operaciones con fracciones algebraicas

64. Fracciones algebraicas equivalentes. — Para que dos fracciones sean equivalentes, han de tener el mismo signo y ser iguales los productos cruzados de sus términos.

Así, las fracciones

$$\frac{4a^2b}{6ab^2} \quad \text{y} \quad \frac{2a}{3b}$$

serán equivalentes, ya que ambas son positivas y se verifica que

$$4a^2b \times 3b = 6ab^2 \times 2a$$

En efecto: si damos valores a las letras, observaremos que las fracciones toman el mismo valor numérico. Por ejemplo, cuando $a = 1$ y $b = -2$, resulta:

$$\frac{4 \times 1 \times (-2)}{6 \times 1 \times (-2)^2} = \frac{-8}{24} = -\frac{1}{3} \quad \text{y} \quad \frac{2 \times 1}{3 \times (-2)} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

65. Propiedad fundamental. — Todas las transformaciones de las fracciones algebraicas se basan en la siguiente propiedad:

Si se multiplican o dividen los dos términos de una fracción algebraica por una misma expresión, se obtiene otra fracción equivalente, salvo para los valores de las letras que anulan a la expresión.

En efecto: designando por C al cociente o valor de la fracción

$$\frac{A}{B}, \quad \text{se tiene} \quad \frac{A}{B} = C, \quad \text{de donde,} \quad A = B \cdot C$$

y multiplicando la última igualdad por la expresión $M \neq 0$, resulta

$$AM = BM \cdot C$$

y de aquí, dividiendo a los dos miembros por BM,

$$\frac{AM}{BM} = C, \quad \text{por lo que} \quad \frac{A}{B} = \frac{AM}{BM}$$

igualdad esta última que, leída en ambos sentidos, demuestra el teorema para los casos de la multiplicación y de la división por M.

66. **Simplificación de fracciones algebraicas.** — *Simplificar una fracción algebraica es hallar otra equivalente, cuyos términos sean de menor grado respecto de los de la primera.*

Para simplificar una fracción algebraica, se dividen sus dos términos por una misma expresión, que sea factor común de los dos términos.

A este fin, lo primero que conviene hacer es poner de manifiesto los factores comunes al numerador y denominador.

Si los dos términos de la fracción son monomios, formaremos la expresión por la cual han de dividirse, de modo análogo a como se hace en Aritmética para la obtención del máximo común divisor de dos números descompuestos en factores primos; o sea, pondremos por coeficiente el m. c. d. de los coeficientes, y como parte literal, las letras comunes al numerador y denominador, cada una con su menor exponente.

EJEMPLO. — Simplificar la fracción

$$\frac{54\,a^5b^4c^3d}{72\,a^4b^5c^2}$$

Dividiendo los dos términos por el factor común $18\,a^4b^4c^2$, resulta

$$\frac{3\,acd}{4\,b}$$

Cuando los términos no son monomios, no puede emplearse una regla general para obtener el divisor común; no obstante, en muchos casos resultará fácil hallarlo, como ocurre en los siguientes

EJEMPLOS:

1.º $\dfrac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - b^2} = \dfrac{(a-b)(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \dfrac{a-b}{a+b}$

2.º $\dfrac{a^2b^2 + ab^3}{a^2 + 2ab + b^2} = \dfrac{ab^2(a+b)}{(a+b)^2} = \dfrac{ab^2}{a+b}$

3.º $\dfrac{3x^2y^2 - 9xy^3}{4x^3y - 12x^2y^2} = \dfrac{3xy^2(x-3y)}{4x^2y(x-3y)} = \dfrac{3y}{4x}$

67. Reducción de fracciones a común denominador. — *Reducir varias fracciones algebraicas a común denominador, es obtener otras respectivamente equivalentes a ellas y que tengan entre sí el mismo denominador.*

Puesto que, en virtud de la propiedad fundamental, al multiplicar los dos términos de una fracción por una misma expresión resulta otra fracción equivalente a la primera, podremos seguir, como en Aritmética, la siguiente regla:

Para reducir varias fracciones algebraicas a común denominador, se multiplican los dos términos de cada fracción por el producto de los denominadores de las demás.

EJEMPLO. — Reducir a común denominador las fracciones siguientes:

$$\frac{a}{b},\quad \frac{c}{d},\quad \frac{e}{f}$$

Tendremos:

$$\frac{a}{b}=\frac{adf}{bdf};\qquad \frac{c}{d}=\frac{cbf}{bdf};\qquad \frac{e}{f}=\frac{ebd}{bdf}$$

68. Observación. — En algunos casos es fácil hallar fracciones con denominador común de menor grado que el obtenido al aplicar la regla anterior.

Así, cuando los denominadores de las fracciones propuestas son monomios con coeficientes enteros, se puede formar el denominador común siguiendo un procedimiento análogo al empleado para hallar el mínimo común múltiplo de varios números descompuestos en factores primos; es decir, pondremos por coeficiente el m. c. m. de los coeficientes de los denominadores, y como parte literal, las letras comunes y no comunes, cada una con su mayor exponente. Una vez hallado el denominador común, bastará dividirlo por el de cada fracción y multiplicar luego el cociente por el respectivo numerador.

EJEMPLO. — Reducir al mínimo denominador común las fracciones

$$\frac{A}{2ab^2c};\qquad \frac{B}{4a^3b};\qquad \frac{C}{12abc^3}$$

Como el m. c. m. de los denominadores es $12a^3b^2c^3$, tendremos:

$$\frac{A}{2ab^2c}=\frac{6a^2c^2A}{12a^3b^2c^3};\qquad \frac{B}{4a^3b}=\frac{3bc^3B}{12a^3b^2c^3};\qquad \frac{C}{12abc^3}=\frac{a^2bC}{12ac^3}$$

Tratándose de fracciones cuyos denominadores no son monomios, no existe ninguna regla general que pueda aplicarse; no obstante, en ciertos casos es fácil distinguir un múltiplo común que sea de menor grado que el formado por el producto de los denominadores.

EJEMPLO. — Reducir al mínimo denominador común:

$$\frac{1}{a-b}; \qquad \frac{m}{ab+b^2}; \qquad \frac{n}{a^2-b^2}$$

Observando que estas fracciones pueden tomar la forma

$$\frac{1}{a-b}; \qquad \frac{m}{b(a+b)}; \qquad \frac{m}{(a+b)(a-b)}$$

tendremos que las fracciones pedidas serán

$$\frac{b(a+b)}{b(a^2-b^2)}; \qquad \frac{m(a-b)}{b(a^2-b^2)}; \qquad \frac{nb}{b(a^2-b^2)}$$

69. Operaciones con fracciones algebraicas. — Por definición, diremos que suma, diferencia, producto y cociente de dos fracciones algebraicas, es una fracción cuyo valor numérico es la suma, la diferencia, el producto, o el cociente de los valores numéricos de dichas fracciones.

De esto se deduce que son aplicables a las fracciones algebraicas las reglas de cálculo dadas para las fracciones cuyos términos son números racionales.

70. Adición y sustracción.

La suma o diferencia de varias fracciones algebraicas de igual denominador, es otra fracción del mismo denominador, que tiene por numerador la suma o diferencia de los numeradores.

En el polinomio numerador que resulte se reducen términos semejantes, y luego se simplifica la fracción si es posible.

Si las fracciones tienen distinto denominador, se reducen previamente a común denominador y se aplica luego la regla anterior.

EJEMPLOS:

1.º $\dfrac{5a-2}{n} + \dfrac{2a}{n} + \dfrac{3-8a}{n} = \dfrac{1-a}{n}$

2.º $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{x^2-(x^2-1)}{(x-1)x} = \dfrac{1}{(x-1)x}$

3.º $\dfrac{m}{m+2} + \dfrac{m}{m-2} = \dfrac{m^2 - 2m + m^2 + 2m}{m^2 - 4} = \dfrac{2m^2}{m^2 - 4}$

4.º $a - b - \dfrac{3a - b^2}{a + b} = \dfrac{a - b}{1} - \dfrac{3a - b^2}{a + b} = \dfrac{a^2 - b^2 - (3a - b^2)}{a + b} = \dfrac{a^2 - 3a}{a + b}$

71. Multiplicación.

El producto de varias fracciones algebraicas es una fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores de las fracciones dadas.

La fracción que resulta se reduce y simplifica si es posible. En la práctica se suprimen de antemano los factores que aparecen a la vez en algún numerador y en algún denominador, y se escribe directamente el producto simplificado.

EJEMPLOS:

1.º $\dfrac{xy^2}{ab^2} \cdot \dfrac{x^2y}{a^2b} \cdot \dfrac{a^4b^4}{x^3y^3} = ab$ 2.º $\dfrac{6a}{a+1} \cdot \dfrac{a^2 - 1}{3a} \cdot \dfrac{1}{a - 1} = 2$

72. División.

Cociente de dos fracciones algebraicas es la fracción obtenida al multiplicar la fracción dividendo por la fracción divisor invertida.

Igual que en la multiplicación, no conviene desarrollar los productos antes de ver si es posible simplificar.

EJEMPLOS:

1.º $\dfrac{5ab^2c^2}{7x^2y^2} : \dfrac{20bc^4}{21axy^2} = \dfrac{5ab^2c^2 \cdot 21axy^2}{7x^2y^2 \cdot 20bc^4} = \dfrac{3a^2b}{4c^2x}$

2.º $\dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{a - b} : \dfrac{a + b}{a^2 - 2ab + b^2} = \dfrac{(a+b)^2(a-b)^2}{(a-b)(a+b)} = a^2 - b^2$

73. Propiedades de las operaciones con fracciones algebraicas. — Las operaciones con fracciones algebraicas se refieren al cálculo con sus valores numéricos; en consecuencia, las propiedades de tales operaciones serán idénticas a las estudiadas al tratar de las operaciones con números racionales. Recordémoslas:

PROPIEDAD UNIFORME. — La poseen las cuatro operaciones fundamentales, y se enuncia así: *Si se suman, restan, multiplican o dividen miembro a miembro dos o más igualdades, resulta otra igualdad.*

PROPIEDAD CONMUTATIVA. — La tienen la suma y la multiplicación. Se enuncia así: *La suma y el producto son iguales, cualquiera que sea el orden en que se tomen los sumandos o los factores.*

PROPIEDAD ASOCIATIVA. — Es propia de la suma y de la multiplicación. La enunciamos como sigue: *Si en una suma se sustituyen dos o más sumandos por su suma efectuada, o se reemplazan en un producto dos o más factores por su producto calculado, el resultado no varía.*

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA. — La poseen la multiplicación y división respecto de la adición y sustracción, y se enuncia de esta manera: *Para multiplicar o dividir una suma o una diferencia por un número o por una expresión algebraica, se multiplica o divide cada término por el número o por la expresión algebraica.*

EJERCICIOS

Simplificar las fracciones siguientes:

401. $\frac{4a^3}{8a}$

402. $\frac{10x^3}{5ax}$

403. $\frac{10a^2b^2c}{24ab^2c^2}$

404. $\frac{18x^5y^2z^3}{24x^3y^4z}$

405. $\frac{18ab^4c^3}{12a^3b^2c^3}$

406. $\frac{105m^3n^4p^6}{42m^2n^6p^2}$

407. $\frac{a^2}{a^2+ab}$

408. $\frac{x^2}{x^2-xy}$

409. $\frac{3ax}{4ax-3ay}$

410. $\frac{3ax}{3ax^2-3axy}$

411. $\frac{6a^2-9ab}{8ab-12b^2}$

412. $\frac{8x^2-12xy}{6x^2-4xy}$

413. $\frac{3x^4-3x^2y^2}{5x^4-5x^2y^2}$

414. $\frac{abx-bx^2}{acx-cx^2}$

415. $\frac{xy-xyz}{3bz-3bz^2}$

416. $\frac{a^2-1}{a-1}$

417. $\frac{a+b}{a^2-b^2}$

418. $\frac{a^2+b^2}{a^4-b^4}$

419. $\frac{a^2-ab}{a^3-ab^2}$

420. $\frac{a^4-b^4}{a^8-b^8}$

421. $\frac{16a^4-81}{4a^2+9}$

422. $\frac{a^2-1}{a^4-1}$

423. $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}$

424. $\frac{a^2+2a+1}{a^2-a-2}$

425. $\frac{(4a^2-1)^2+1}{(4a^2-1)^4-1}$

426. $\frac{4b^2+c^2-4bc}{c^2-4b^2}$

427. $\frac{3a^3b^4+9a^3b^2x^2}{4a^2b^5+12a^2b^3x^2}$

428. $\frac{1-x^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}$

429. $\frac{x^6-2x^3y^3+y^6}{x^6-y^6}$

430. $\frac{a^2+2ab+b^2-c^2}{a^2-b^2-2bc-c^2}$

Reducir a común denominador las fracciones siguientes:

431. $5;\ \frac{a}{b}$

432. $\frac{a}{4};\ \frac{b}{3}$

433. $4;\ \frac{a}{b};\ -\frac{c}{d}$

434. $\frac{a}{bc};\ \frac{b}{ac};\ \frac{c}{ab}$

435. $\frac{a}{bx};\ -\frac{b}{ax^2};\ \frac{c}{abx^3}$

436. $2;\ -1;\ \frac{1}{2a^2};\ -\frac{1}{4a^4}$

437. $\frac{3a}{a^2-b^2};\ \frac{5b}{a+b}$

438. $\frac{ab}{a^4-1};\ \frac{2a}{a^2+1};\ \frac{3ab^2}{a^2-1}$

439. $\frac{x-y}{x+y};\ \frac{y}{x^2+y^2+2xy}$

440. $\frac{b}{a-b};\ \frac{b^2}{a^2-b^2};\ \frac{a}{a+b}$

Efectuar las operaciones que se indican y simplificar, cuando sea posible:

441. $\frac{a}{2}+\frac{a^2}{5}-\frac{ab}{15}+\frac{b}{20}$

442. $\frac{a+b+c}{2}-b$

443. $\frac{3a}{x+y}-\frac{3}{x^2-y^2}$

444. $\frac{3x-4y}{6}+\frac{9x+2y}{18}-\frac{7x-5y}{3}$

445. $\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}$

446. $\frac{2}{x-3}+\frac{5}{x+3}+\frac{1}{x^2-9}$

447. $\frac{1}{a-2}-\frac{3}{a^2-4}+\frac{2}{a+2}$

448. $\frac{x+2y}{x-2y}-\frac{x-2y}{x+2y}$

449. $\frac{3a}{a-1}-6+\frac{3a}{a+1}$

450. $\frac{2}{3}-\frac{x}{x-y}+\frac{y}{x+y}$

451. $\frac{1}{1-2x}-\frac{2x}{1-4x^2}$

452. $\frac{3a}{9a^2-4b^2}-\frac{1}{3a+2b}$

453. $\frac{2y}{(x-2y)^2}+\frac{1}{x-2y}$

454. $\frac{x}{x^2-y^2}+\frac{y}{y^2-x^2}$

455. $\frac{4}{x-4}-\frac{16-3x}{x^2-16}$

456. $\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}-\frac{2y^2}{x^2-y^2}$

457. $\frac{a+1}{a-1}+\frac{a-1}{a+1}-\frac{2(a^2+1)}{a^2-1}$

458. $ax(a+x)-\frac{a^4x+ax^4}{a^2+2ax+x^2}$

459. $x^2+x+1+\frac{x-x^3-x^4}{x^2-1}$

460. $\frac{2}{1+x}-\left(\frac{6}{1-x}+\frac{3}{1-x^2}\right)$

461. $17 \times \frac{1}{34\,a^2x}$

462. $\frac{2\,a}{3\,b^2} \times \frac{5\,b}{a^2}$

463. $\frac{3\,y^2}{4\,x^4} \times \left(-\frac{3\,x^2}{4\,y}\right)$

464. $(a^2-2ab+b^2)\frac{2\,c}{a-b}$

465. $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

466. $\frac{a^2-b^2}{2\,x} \times \frac{4\,x^3}{a^4-b^4}$

467. $\frac{6\,a}{a+1} \times \frac{a^2-1}{3\,a^2}$

468. $\frac{x}{x-1} \times \frac{x^2-1}{x} \times \frac{x}{x+1}$

469. $\frac{3\,m-6}{2\,m} \times \frac{3\,m^2}{m-2}$

470. $\frac{a^2-b^2}{ax} \times \frac{a^2+b^2}{a^2x^2}$

471. $\frac{x}{a}\left(a-\frac{a^2}{x}\right)$

472. $\frac{a^2}{b^2}\left(ab^2-\frac{b^2}{a^2}\right)$

473. $\left(a+\frac{2\,ab}{a-b}\right)\left(3\,a-\frac{6\,ab}{a+b}\right)$

474. $\left(x^2-a+\frac{2\,a^2}{x^2+a}\right)(x^2+a)$

475. $\left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x-y}\right)\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}\right)$

476. $\frac{4\,a^2b^3}{c^5} \cdot \frac{16\,a^4b^2}{c^6}$

477. $9\,a^2b : \left(-\frac{3\,a^4b^2}{c^2}\right)$

478. $x^2 : \left(-\frac{x}{y}\right)$

479. $(x+y) : \frac{x^2-y^2}{y}$

480. $\frac{a^2-b^2}{x+y} : \frac{a-b}{x^2-y^2}$

481. $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right) : \frac{ab}{a+b}$

482. $\left(x^3-x^2+1-\frac{1}{x}\right) : \left(x-\frac{1}{x}\right)$

483. $\left(a^4-\frac{1}{a^2}\right) : \left(a^2+\frac{1}{a}\right)$

484. $\frac{x^3-3\,x^2y+3\,xy^2-y^3}{x+y} : \frac{x-y}{x+y}$

485. $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right) : \left[1-\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}\right]$

486. $\left(x-2-\frac{x^2-5\,x}{x-3}\right) : \left(x+\frac{3\,x}{x-3}\right)$

487. $\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right) : \left[\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\right]$

488. $\left(\frac{n+1}{n-1}-\frac{n-1}{n+1}\right) : \left(\frac{n^2+4\,n-1}{n^2-1}-1\right)$

489. $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right) : \left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)$

490. $\left(3+\frac{3\,a}{a+2\,b}\right) : \left(2-\frac{a^2-7\,b^2}{a^2-4\,b^2}\right)$

9. Ecuaciones de primer grado

74. Ecuaciones. Definiciones. — Recordemos que *ecuación* es la igualdad que solamente se verifica para ciertos valores numéricos de las letras que en ella intervienen, denominadas *incógnitas.*

Las incógnitas se representan ordinariamente por las últimas letras del abecedario: x, y, z.

Resolver una ecuación es determinar los valores que, puestos en lugar de la incógnita (o de las incógnitas, si hay varias), convierten a la ecuación en una igualdad numérica, o, como suele decirse, *verifican* o *satisfacen* a la ecuación. Dichos valores se denominan *soluciones* de la ecuación.

Cuando la ecuación tiene sólo una incógnita, la solución, o soluciones, se llaman también *raíces* de la ecuación.

Así, son ecuaciones las siguientes igualdades:

$$5x - 6 = 3x; \qquad 2x - 3 = x + 1; \qquad 8x^2 - 1 = 2x + 2$$

ya que, en efecto, sus dos miembros toman igual valor numérico tan solo al hacer

$x = 3$, en la 1.ª; $x = 4$, en la 2.ª; $x = \frac{3}{4}$ y $x = \frac{1}{2}$, en la 3.ª

De estos valores decimos que son las soluciones o raíces de las respectivas ecuaciones. En las tres ecuaciones hay solamente una incógnita, representada por la letra x.

75. Clases de ecuaciones. — Hay diversas clases de ecuaciones. Para su clasificación, podemos atender:

1.° *A las incógnitas.* En este caso, una ecuación puede ser:

Racional, cuando sus dos miembros son expresiones racionales respecto de las incógnitas. Una ecuación racional puede ser, a su vez:

Entera, cuando sus dos miembros son expresiones enteras respecto de las incógnitas. Ej. $\frac{x+2}{4} - \frac{x+3}{6} = 2$

Fraccionaria, cuando alguna de sus incógnitas forma parte de un denominador. Ej. $\frac{3(x-1)}{x+7} = -\frac{3}{5}$

Irracional, cuando alguna de sus incógnitas figura bajo el signo radical. Ejemplo: $x - \sqrt{x^2 - 3} = 1$

De 1.º, *de* 2.º, *de* 3.º, *etc. grado,* si después de hechas todas las simplificaciones posibles y pasados a un solo miembro todos los términos que contienen las incógnitas, el grado del polinomio que resulta en dicho miembro es de 1.º, de 2.º, de 3.º, etc. grado, respecto de la incógnita o incógnitas.

Las ecuaciones de 1.er grado se llaman también *lineales,* y las de 2.º, *cuadráticas.*

EJEMPLOS:

$2x = 14$ es una ecuación de 1.er grado con una incógnita
$2x + 3y = 1$ » » » » 1.er grado con dos incógnitas
$2x^2 + 5x - 25 = 0$ » » » » 2.º grado con una incógnita
$x - xy + 3y = 9$ » » » » 2.º grado con dos incógnitas

2.º *A los datos.* Si en lugar de a las incógnitas, atendemos a los datos (*) de la ecuación, ésta puede ser:

Numérica, cuando las únicas letras que contiene son las incógnitas.

Ej. $3x + 5 = x + 13$

Literal, cuando, además de las incógnitas, contiene otras letras, consideradas como cantidades conocidas o datos. Ej. $ax = a^2 - ab$, cuya solución es $x = a - b$, ya que para este valor de x, la ecuación se convierte en identidad.

76. Ecuaciones equivalentes.

Se dice que dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.

Para que dos ecuaciones sean equivalentes, no basta que *todas* las soluciones de una lo sean de la otra; es preciso, además, que *todas* las de ésta lo sean de aquélla.

Así, por ejemplo, son ecuaciones equivalentes

$$\frac{4x}{3} - \frac{x}{2} = 5 \quad \text{y} \quad 5x = 30$$

ya que ambas tienen únicamente la raíz $x = 6$.

No son, en cambio, equivalentes

$$x + 2 = 6 \quad \text{y} \quad x^2 = 20 - x$$

pues, aunque las dos tienen la solución $x = 4$, la segunda tiene además la raíz $x = -5$, que no satisface a la primera.

(*) Llamados también *parámetros,* y que suelen representarse por las primeras letras del alfabeto: *a, b, c,*

77. **Transformación de ecuaciones.** —La resolución de una ecuación se reduce a la de otra equivalente a ella cuyas soluciones pueden calcularse fácilmente. De aquí se deduce que el procedimiento a seguir para resolver una ecuación, consiste en ir transformándola en otras equivalentes, cada vez más sencillas. Esto se consigue por la aplicación de los dos teoremas que a continuación vamos a demostrar.

Antes, convendremos en representar a una ecuación, en general, por la notación

$$A(x) = B(x)$$

que leeremos: «A de x igual a B de x». Y, según el concepto que tenemos de ecuación, se deduce que si a es una solución de la ecuación anterior, habrá de ser

$$A(a) = B(a)$$

78. TEOREMA I: **Suma de un número o de una expresión entera a los dos miembros de una ecuación.**

Si se suma un mismo número o una expresión entera a los dos miembros de una ecuación, se obtiene otra ecuación equivalente a la primera.

En efecto: sea la ecuación

$$A(x) = B(x) \qquad [1]$$

Supongamos que se quiere añadir a los dos miembros la expresión que representamos por $C(x)$. Resultará

$$A(x) + C(x) = B(x) + C(x) \qquad [2]$$

Inversamente, si de la [2] restamos la expresión $C(x)$, se obtendrá la [1].

Para demostrar que las ecuaciones [1] y [2] son equivalentes, hay que probar que toda solución de la ecuación [1], lo es de la [2] y recíprocamente, las soluciones de la [2], lo son asimismo de la [1].

1.° *Toda solución de la ecuación* [1] *es también solución de la* [2].

Por definición, toda solución a de la ecuación [1] hará que sus dos miembros tomen valores iguales. Es decir,

$$A(a) = B(a)$$

Sumando a los dos miembros de esta igualdad el valor numérico que toma la expresión $C(x)$ para $x = a$, se obtendrá la nueva igualdad

$$A(a) + C(a) = B(a) + C(a)$$

Esto nos dice que la solución a de la ecuación [1], es también solución de la [2].

2.° *Toda solución de la ecuación* [2], *lo es de la* [1].

Si llamamos b a una solución de la ecuación [2], habrá de verificarse la igualdad

$$A(b) + C(b) = B(b) + C(b)$$

Restando de los dos miembros el valor numérico representado por $C(b)$, nos queda

$$A(b) = B(b),$$

igualdad que nos dice que b es también solución de [1], como se quería demostrar.

El mismo razonamiento nos serviría para el caso de haber sumado un número cualquiera m, en vez de la expresión entera $C(x)$.

79. APLICACIONES: Transposición de términos.

Todo término de una ecuación puede pasar de un miembro a otro, con tal de cambiarle de signo.

Así, en la ecuación

$$6x + 9 = 3x + 12$$

podemos sumar a los dos miembros $-3x$, y resulta

$$6x + 9 - 3x = 3x + 12 - 3x$$

Reduciendo ahora términos semejantes en el segundo miembro, nos queda

$$6x + 9 - 3x = 12$$

Igualmente, se puede sumar -9 a los dos miembros de esta ecuación, con lo cual obtenemos

$$6x + 9 - 3x - 9 = 12 - 9$$

y de aquí

$$6x - 3x = 12 - 9$$

En ambos casos, se observa que el término sumado ha desaparecido del miembro en que estaba y aparece en el otro miembro, cambiado de signo.

Esta operación, que se denomina *transposición de términos,* se emplea con mucha frecuencia para hacer que figuren en un miembro todos los términos dependientes de la incógnita y en el otro los independientes.

Si en una ecuación cambiamos el signo de cada uno de sus términos, resulta una ecuación equivalente a la primera.

Equivale, en efecto, esta operación a pasar todos los términos del primer miembro al segundo y los del segundo al primero.

Suponiendo, por ejemplo, la ecuación

$$5x - 3 = 2x + 18$$

podemos poner

$$-2x - 18 = -5x + 3$$

y también,

$$-5x + 3 = -2x - 18$$

3.ª *Se puede sustituir una ecuación por otra equivalente cuyo segundo miembro sea cero.*

Así, la ecuación

$$x^2 = 8x - 15$$

es equivalente a esta otra

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

Esta última operación se denomina *reducción del segundo miembro a cero,* y se emplea en la resolución de la ecuación de segundo grado.

80. TEOREMA II: **Multiplicación o división por un número de los dos miembros de una ecuación.**

Si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación por un mismo número, distinto de cero, se obtiene otra ecuación equivalente a la primera.

En efecto: sea la ecuación

$$A(x) = B(x) \qquad [1]$$

Supongamos que se quiere multiplicar a los dos miembros por m, con la condición de ser m un número distinto de cero. Tendremos:

$$A(x) \cdot m = B(x) \cdot m \qquad [2]$$

Si, a su vez, dividimos por m a esta ecuación, resultará la [1].

Demostremos cómo las ecuación [1] y [2] son equivalentes.

Para ello, habrá que probar que toda solución de la primera lo es de la segunda, y recíprocamente.

1.° *Toda solución de la ecuación* [1] *es también solución de la* [2].

Si a es una raíz de la ecuación [1], se verificará la igualdad

$$A(a) = B(a)$$

y multiplicando sus dos miembros por $m \neq 0$, se obtiene la nueva igualdad

$$A(a) \cdot m = B(a) \cdot m$$

que prueba ser a solución de la ecuación [2].

2.° *Toda solución de la ecuación* [2], *lo es asimismo de la* [1].

Si suponemos que la ecuación [2] tiene la raíz b, se cumplirá que

$$A(b) \cdot m = B(b) \cdot m$$

es una igualdad, y al dividir sus dos miembros por $m \neq 0$, obtendremos esta otra

$$A(b) = B(b),$$

la cual indica que b es también solución de la ecuación [1].

81. Aplicación: Supresión de denominadores.

Dada una ecuación entera, pero de coeficientes fraccionarios, dicha ecuación puede transformarse en otra equivalente de coeficientes enteros, multiplicando sus dos miembros por el producto de los denominadores, o por el mínimo común múltiplo de éstos.

Esta operación recibe el nombre de *quitar denominadores*.

Ejemplo 1.° — Sea la ecuación

$$\frac{x}{2} - \frac{5x}{6} = 2 - \frac{x-2}{9}$$

Multipliquemos los dos miembros por 18 = m. c. m. (2, 6 y 9).

Se tiene:

$$\frac{x}{2} \cdot 18 - \frac{5x}{6} \cdot 18 = 2 \cdot 18 - \frac{x-2}{9} \cdot 18$$

y simplificando,

$$9x - 15x = 36 - (x-2)2$$

o su equivalente

$$9x - 15x = 36 - 2x + 4$$

EJEMPLO 2.º — En la ecuación

$$\frac{x-b}{a} - \frac{x+a}{b} = \frac{2b}{a}$$

podemos multiplicar los dos miembros por ab, obteniéndose

$$b(x-b) - a(x+a) = 2b^2$$

82. Resolución de una ecuación de primer grado con una incógnita. Discusión. — Los teoremas referentes a la transformación de ecuaciones nos servirán para resolver la ecuación de primer grado.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.º — *Resolver la ecuación*

$$10x - 3(2x-6) = 38$$

1.º Efectuemos la operación indicada por el paréntesis:

$$10x - 6x + 18 = 38$$

2.º Hagamos una transposición de términos, dejando en el primer miembro los términos dependientes de la incógnita y llevando al segundo miembro los independientes:

$$10x - 6x = 38 - 18$$

3.º Reduzcamos términos semejantes:

$$4x = 20$$

4.º Aislemos la incógnita. Para ello, dividamos los dos miembros por el coeficiente de x.

$$x = \frac{20}{4} = 5$$

La raíz de la ecuación propuesta es 5

COMPROBACIÓN:

$$10 \cdot 5 - 3(2 \cdot 5 - 6) = 38$$

Ejemplo 2.º — *Resolver la ecuación*

$$2(9-2x) - 24 = -12 - (3+x)$$

1.º Efectuar operaciones:

$$18 - 4x - 24 = -12 - 3 - x$$

2.º Transposición de términos:

$$-4x + x = -12 - 3 - 18 + 24$$

3.º Reducción de términos semejantes:

$$-3x = -9$$

4.º Aislar la incógnita:

$$x = \frac{-9}{-3} = 3$$

COMPROBACIÓN:

$$2(9-2 \cdot 3) - 24 = -18$$
$$-12 - (3+3) = -18$$

Ejemplo 3.º — *Resolver la ecuación*

$$\frac{x+2}{4} - \frac{x+3}{6} = 2$$

1.º Quitar denominadores: m. c. m. (4, 6) = 12

$$3(x+2) - 2(x+3) = 12 \cdot 2$$

2.º Efectuar operaciones:

$$3x + 6 - 2x - 6 = 24$$

3.º Transposición de términos:

$$3x - 2x = 24 - 6 + 6$$

4.º Reducción de términos semejantes:

$$x = 24$$

La solución es 24, como puede fácilmente comprobarse.

Ejemplo 4.º — *Resolver la ecuación*

$$\frac{4-7x}{12} - \frac{3x+4}{2} - \frac{3-19x}{8} = 0$$

1.º Quitar denominadores: m. c. m. (12, 2, 8) = 24

$$2(4-7x) - 12(3x+4) - 3(3-19x) = 0.$$

2.º Efectuar operaciones:

$$8 - 14x - 36x - 48 - 9 + 57x = 0$$

3.º Transposición de términos:

$$-14x - 36x + 57x = -8 + 48 + 9$$

4.º Reducción de términos semejantes:

$$7x = 49$$

5.º Aislar la incógnita:

$$x = \frac{49}{7} = 7$$

Ejemplo 5.º — *Resolver la ecuación*

$$\frac{2x+5}{4} + x = \frac{3x-1}{2} + 7$$

Preparación: m. c. m. (4, 2) = 4

$$2x + 5 + 4x = 6x - 2 + 28$$
$$2x + 4x - 6x = -2 + 28 - 5$$
$$6x - 6x = 21$$

Cualquiera que sea el valor de x, el primer miembro de esta ecuación es nulo y el segundo no. Esto significa que la ecuación no tiene solución, o que *es imposible*.

Ejemplo 6.º — *Resolver la ecuación*

$$\frac{3x}{4} - \frac{2(x-2)}{5} = \frac{7x+16}{20} \qquad [1]$$

Multipliquemos los dos miembros por 20, m. c. m. de los denominadores, y efectuemos luego las sucesivas operaciones:

$$15x - 8(x-2) = 7x + 16$$
$$15x - 8x + 16 = 7x + 16$$
$$15x - 8x - 7x = 16 - 16$$
$$15x - 15x = 0$$

La igualdad anterior se cumple para cualquier valor de x, ya que en todo caso sus dos miembros se reducen a cero.

Por consiguiente, la igualdad [1] es una identidad, a la que llamamos *ecuación indeterminada,* queriendo significar con ello que cualquier valor de x la satisface.

Ejemplo 7.º — *Resolver la ecuación literal*

$$\frac{x}{b} + \frac{x}{a-b} = \frac{a}{a+b}$$

Quitando denominadores, se obtiene

$$(a-b)(a+b)x + (a+b)bx = ab(a-b)$$

Efectuando las operaciones indicadas en el primer miembro, resulta

$$a^2x - b^2x + abx + b^2x = ab\,(a-b)$$

Reduciendo términos semejantes, hallamos

$$a^2x + abx = ab\,(a-b)$$

Sacando a x factor común, nos queda

$$(a^2+ab)\,x = ab\,(a-b)$$

y dividiendo los dos miembros por $a^2 + ab = a\,(a+b)$, resulta

$$x = \frac{ab\,(a-b)}{a\,(a+b)} = \frac{b\,(a-b)}{a+b}$$

La ecuación tendrá por solución este resultado, como fácilmente puede comprobarse.

REGLA PRÁCTICA. — Podemos resumir las operaciones efectuadas en los ejemplos anteriores, diciendo:

Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita:

1.° **Se quitan denominadores.**

2.° **Se efectúan las operaciones indicadas.**

3.° **Se escriben en un miembro los términos que contienen la incógnita y en el otro los independientes.**

4.° **Se reducen los términos semejantes. Si la ecuación es literal, se saca a la incógnita factor común.**

DISCUSIÓN. — *Discutir una ecuación es analizar los valores que puede tomar la incógnita o incógnitas, según los que se atribuyan a los datos.*

Toda ecuación de primer grado con una incógnita puede reducirse, después de efectuadas las operaciones, a la forma general

$$ax = b$$

Hagamos la discusión de dicha forma general. Para ello, atribuyamos a los datos a y b valores cualesquiera y examinemos los que toma la incógnita x.

1.° Si $a \neq 0$, la ecuación tiene por *solución única* el valor dado por la fórmula

$$x = \frac{b}{a}$$

2.° Si $a = 0$ y $b \neq 0$, la ecuación toma la forma

$$0 \times x = b$$

por lo que no tendrá solución, ya que es imposible encontrar un número que multiplicado por cero dé producto distinto de cero. Decimos que hay *imposibilidad.*

3.° Si $a = 0$ y $b = 0$, la ecuación toma la forma

$$0 \times x = 0$$

por lo que cualquier número puede servir de solución a la misma. En este caso decimos que hay *indeterminación.*

RESUMEN DE LA DISCUSIÓN

$a \begin{cases} \neq 0 \ldots\ldots & \text{1 solución: } x = \dfrac{b}{a} \\ = 0;\ b \begin{cases} \neq 0 \ldots\ldots & \text{imposibilidad} \\ = 0 \ldots\ldots & \text{indeterminación} \end{cases} \end{cases}$

EJERCICIOS

Resolver las ecuaciones siguientes:

491. $2x - 1 = x + 5$

492. $5x - 2x + 12 = 35 - 4x - 9$

493. $5x - 2x - 17 = -1 + 6x - x$

494. $3x - 15 + 2x - 14 = x - 11$

495. $12x = 3(3x-5)$

496. $3x - 1 = 2(x-1)$

497. $2(x+2) - 5(2x-3) = 3$

498. $x - (x+1)(x-3) = 4x - 8 - x^2$

499. $(x-3)(x+3) - (x+2)(x-2) - 3x = 8$

500. $x(x+8) - x(x+3) = 10$

501. $2 - (x-1)(x+3) + (x+7)(x-3) = 10$

502. $(x-4)(x-3) = (x+4)(x-6) + 1$

503. $11x - 2(x-1)(x+3) = 4 - (2x-1)(x+2)$

504. $(x-3)^2 - (x-2)^2 = -5$

505. $4x - [2x-(3x-1)] = 4 - 2x$

506. $(x+3)^2 - (x-4)^2 = (x+2)^2 - (x-3)^2 - 38$

507. $2 - 3(x-7) - 7x = 4(x-2) + 8$

508. $2(x+2)^2 - (2x-5)(x+1) = -20$

509. $(x-2)(x-3) - 2(x-4)(x-3) = 1 - (x+7)(x-5)$

510. $3[x+x(x-3)+4] = (3x-2)(x+1)$

511. $3ax - a^3 = 0$

512. $ax + bx = a + b$

513. $ax + bx = c - dx$

514. $ax + b^2 = bx + a^2$

515. $3ax - 2b = 3b - 2ax$

516. $a(ax+b) = c(ax-b)$

517. $(a+x)(a+2x) = (a-2x)(a-x)$

518. $x^2 + 2ax = (x-a)(x+a)$

519. $(a+x)(a-b) = (a-x)(a+b)$

520. $(x+1)(m-n) = (x-1)(m+n)$

521. $0'3x - 4'6 = 0'9 - 0'25x$

522. $0'6x - 0'5x = 0'2$

523. $0'04x = 2'4 + 0'1x$

524. $4(3x+5) + 0'8(2x+3) = 76'8$

525. $\frac{x}{4} = 9$

526. $\frac{4}{x} = 2$

527. $\frac{x}{3} + \frac{x}{7} = 20$

528. $3x - 11 + \frac{5x}{2} = 0$

533. $\frac{x}{176 - x} = \frac{3}{5}$

534. $\frac{3x - 7}{3x - 17} = -1$

535. $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} = 7$

536. $x - 872 + \frac{9x}{100} = 0$

529. $\frac{x}{3} + 7 = 62$

530. $\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 5$

531. $84 - x = \frac{2x}{5}$

532. $3 + x = \frac{27 + x}{4}$

537. $\frac{8x}{9} - \frac{5x}{6} - 12 = 0$

538. $\frac{16x}{5} + \frac{3x}{2} = 43 + \frac{2x}{5}$

539. $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} = x - 12$

540. $\frac{x-5}{9} = \frac{x-25}{5}$

541. $17x = 51$

542. $\frac{2x}{3} = 6$

543. $\frac{x}{6} = \frac{1}{3}$

544. $\frac{3x}{4} = \frac{6}{8}$

545. $15x = 10$

546. $\frac{x}{6} = \frac{1}{12}$

547. $-\frac{x}{3} = \frac{1}{12}$

548. $\frac{5x}{4} = 10$

549. $\frac{6x}{5} = -18$

550. $\frac{3x}{4} = 0$

551. $\frac{5x}{7} = \frac{15}{14}$

552. $\dfrac{2'3x - 2'7}{9} = \dfrac{4'6x - 3'6}{7}$

553. $\dfrac{3x}{2} - \dfrac{2x}{3} = \dfrac{5}{2}$

554. $\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{4}x = \dfrac{23}{24}$

555. $\dfrac{2x + 13}{3} - \dfrac{6 - x}{4} = 1$

556. $\dfrac{x + 3}{4} + \dfrac{4x - 5}{5} = 5$

557. $\dfrac{6 - x}{4} - \dfrac{3x + 10}{3} = 2$

---

558. $\dfrac{3(x-1)}{4} + \dfrac{5x - 7}{4} = \dfrac{3}{2}$

559. $\dfrac{1}{4}(3x+5) + \dfrac{1}{6}(x+4) = 1$

560. $\dfrac{x - 2}{2} + \dfrac{3x + 2}{2} = 6$

561. $4x + \dfrac{6x}{7} = \dfrac{3x + 2}{2} + 46$

562. $\dfrac{1}{3}(x+3) - \dfrac{5}{6}(x+1) = \dfrac{2}{3}$

563. $x - \dfrac{4x}{5} + 39 = x + \dfrac{x}{2}$

564. $9 + \dfrac{7x - 54}{5} = 27 - x$

565. $\dfrac{23 - x}{5} + \dfrac{x - 1}{7} + \dfrac{4 - x}{4} = 7$

566. $3x - 14 + \dfrac{2x + 7}{3} = \dfrac{5x - 7}{2}$

567. $x - \dfrac{3x}{4} + \left(\dfrac{x - 10}{4}\right)\dfrac{2}{3} = 450$

568. $\dfrac{x - 1}{5} + \dfrac{x - 2}{4} + \dfrac{x - 3}{3} = 3$

569. $\dfrac{5 - 2x}{4} - x = -2 - \dfrac{6x - 8}{2}$

570. $\dfrac{4x + 3}{5} - \left(x - \dfrac{2x - 2}{6}\right) = 4$

571. $\dfrac{x}{3} - \dfrac{x - 3}{3} + x = 12 - \dfrac{x + 4}{2}$

572. $\dfrac{5x + 7}{2} + \dfrac{2x + 4}{3} = \dfrac{3x + 9}{4} + 5$

573. $\dfrac{x - a}{b} - \dfrac{x - b}{a} = \dfrac{b}{a}$

10. Problemas de primer grado con una incógnita

83. **Problemas.** — Una de las aplicaciones más importantes del Álgebra es la resolución de *problemas*. La notación algebraica, tan clara y concisa, facilita grandemente esa resolución.

PROBLEMA *es toda cuestión que tiene por objeto hallar una o más cantidades desconocidas (incógnitas), relacionadas con otras que se conocen, llamadas datos.*

Según que los datos sean números o letras, los problemas se llamarán *particulares* o *generales*.

Tratamos aquí únicamente de los *problemas de primer grado con una incógnita*, es decir, de aquellos cuya resolución da lugar a una ecuación de primer grado con una incógnita.

84. **Método para la resolución de un problema de primer grado.** — El método a seguir en la resolución de un problema de primer grado con una incógnita, se reduce a estas tres cosas:

1.º Se representa por una letra (por x ordinariamente) la cantidad que ha de tomarse como incógnita.

2.º Se expresa la relación que, según el enunciado del problema, debe existir entre la incógnita y los datos.

3.º Se resuelve la ecuación obtenida.

Es conveniente efectuar la *comprobación* del resultado del problema, viendo si se cumplen las condiciones expresadas en el enunciado.

85. **Ejemplos:** PROBLEMA 1.º — *Un obrero ha empleado 25 días para realizar un trabajo. Si hubiera dedicado en el mismo 2 horas más por día, habría llevado a cabo su labor en 20 días. Averiguar las horas que trabajó diariamente.*

Llamando x al número de horas que trabajó al día, el total de las empleadas en los 25 días vendrá expresado por $25\,x$.

De haber prolongado la jornada 2 horas más, ese mismo tiempo se indicaría por el producto $20\,(x+2)$.

Por consiguiente, podemos establecer la ecuación

$$25\,x = 20\,(x+2)$$

cuya raíz es $x = 8$.

El obrero, según esto, trabajó 8 horas diarias.

COMPROBACIÓN:

$$25 \cdot 8 = 200; \qquad 20\,(8+2) = 200$$

PROBLEMA 2.° — *Repartir* 5.000 *ptas. entre tres personas, de manera que la segunda reciba* 500 *ptas. más que la primera, y la tercera* 200 *pesetas menos que la segunda.*

Consideremos como incógnita la cantidad correspondiente a la primera persona, y llamémosla x; con lo cual, según el enunciado del problema, la segunda persona recibirá $x + 500$, y la tercera $x + 500 - 200 = x + 300$.

Como la suma de estas cantidades es 5.000, podremos escribir

$$x + x + 500 + x + 300 = 5.000$$

ecuación cuya solución es $x = 1.400$.

Por consiguiente, la primera persona recibirá 1.400 ptas., la segunda persona $1.400 + 500 = 1.900$ ptas., y la tercera $1.400 + 300 = 1.700$ ptas.

COMPROBACIÓN:

$$1.400 + 1.900 + 1.700 = 5.000$$

PROBLEMA 3.° — *Hallar dos números consecutivos, tales que la mitad y la quinta parte del primero suman igual que el tercio y la cuarta parte del segundo.*

Si representamos al menor de los números por x, el otro será $x + 1$, debiéndose cumplir que

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{5} = \frac{x+1}{3} + \frac{x+1}{4}$$

ecuación que tiene por raíz $x = 5$. Luego, uno de los números es 5, y el otro $5 + 1 = 6$.

COMPROBACIÓN:

$$\frac{5}{2} + \frac{5}{5} = \frac{7}{2}; \qquad \frac{6}{3} + \frac{6}{4} = \frac{7}{2}$$

PROBLEMA 4.° — *Se han pagado* 118 *ptas. con billetes de cinco y de dos pesetas. Si en total se dieron* 35 *billetes, ¿cuántos había de cada clase?*

Llamando x al número de billetes de 5 ptas., evidentemente serán $35 - x$ los de 2 pesetas.

El valor en pesetas de estas dos clases de billetes es, respectivamente,

$$5x \quad \text{y} \quad 2(35-x)$$

Como entre todos suman 118 ptas., se verificará la ecuación

$$5x + 2(35-x) = 118$$

que, resuelta, da $x = 16$.

Había, por tanto, 16 billetes de cinco pesetas y $35 - 16 = 19$ de dos pesetas.

COMPROBACIÓN:

$$16 \cdot 5 = 80; \qquad 19 \cdot 2 = 38; \qquad 80 + 38 = 118$$

PROBLEMA 5.° — *Una persona que posee un cierto capital, pierde en un negocio* 4.000 *ptas.; luego, en una segunda operación, gana la cuarta parte de lo que le había quedado. Sabiendo que después de esto le faltan* 5.000 *pesetas para reunir un capital que sea los* 5/4 *del primitivo, ¿cuál fue el capital inicial?*

Representando por x el capital con que comenzó, se tendrá, de acuerdo con las condiciones del problema:

$$x - 4.000 + \tfrac{1}{4}(x-4.000) = \frac{5x}{4} - 5.000$$

ecuación que es equivalente a esta otra

$$5x - 5x = 0$$

Cualquier valor que demos a x, hace que los dos miembros de esta ecuación sean iguales a cero. Lo cual significa que las relaciones expresadas en el enunciado se verifican siempre, cualquiera que sea el capital inicial. Es decir: *el problema es indeterminado.*

PROBLEMA 6.° — *Hallar un número cuya mitad, menos* 6 *unidades, más los* 3/4 *de dicho número, nos dé un resultado igual a la suma de su tercera parte más los* 11/12 *del mismo.*

Designando por x al número que se busca, la ecuación a que da lugar el problema será

$$\frac{x}{2} - 6 + \frac{3x}{4} = \frac{x}{3} + \frac{11x}{12}$$

de la que se deduce

$$15x - 15x = 72$$

Cualquiera que sea el valor que atribuyamos a x en esta ecuación, su primer miembro se anulará siempre, mientras que el segundo permanece constante. Ello nos indica que dicha ecuación es *imposible*, así como el problema que la ha originado.

86. Interpretación de soluciones negativas. — No siempre la solución negativa indica imposiblidad. Cuando se refiere a una cantidad que puede tener dos sentidos opuestos, la solución negativa tendrá una clara interpretación. Veámoslo en un ejemplo.

PROBLEMA — *Un padre tiene* 49 *años y su hijo* 21. *¿Cuántos años han de transcurrir para que la edad del padre sea* 3 *veces la del hijo?*

Sea x el número de años que deberán transcurrir.

Dentro de x años, la edad del padre será $49 + x$ y la del hijo $21 + x$; como entonces el número de años del primero será 3 veces el del segundo, se tiene la ecuación

$$49 + x = 3\,(21 + x)$$

cuya solución es $x = -7$.

La solución negativa $x = -7$, indica que el problema es imposible en el *futuro*. En efecto: nunca en el futuro la edad del padre podrá ser 3 veces la del hijo.

Sin embargo, la solución hallada puede ser interpretada en otro sentido, ya que podemos considerar el tiempo también en el *pasado*.

Para que el problema sea posible, bastará modificar su enunciado de este modo:

Un padre tiene 49 *años y su hijo* 21. *¿En qué época la edad del padre es* 3 *veces la del hijo?*

Así, considerando el momento presente como punto de partida para medir el tiempo, y adoptando como positivo el sentido hacia el porvenir, la solución $x = -7$ indicará que hace 7 años, la edad del padre fue tres veces la del hijo.

COMPROBACIÓN:

$$49 - 7 = 42; \qquad 21 - 7 = 14; \qquad 42 = 3 \cdot 14$$

87. Problemas de móviles. — Una clase típica de problemas de primer grado y que, considerados en general, se prestan a una amplia discusión, son los llamados *problemas de móviles*. Veamos algunos casos particulares.

PROBLEMA 1.° — *Dos trenes circulan por un ferrocarril de vía doble con movimiento uniforme, uno con velocidad de* 60 *Km. por hora, y otro con velocidad de* 40 *Km.-hora. En un momento dado pasa el primero por*

la estación A *y el segundo por la estación* B, *distantes entre sí* 120 *Km. Suponiendo que los dos van en el sentido* X'X, *se desea saber a qué distancia de la estación* A *se efectuará el encuentro* (fig. 5).

FIG. 5

Adoptemos el kilómetro como unidad para medir el espacio o distancia, y sea E el punto de encuentro. Si designamos por x la distancia AE, la BE será igual a $x - 120$.

Ahora bien: como en el movimiento uniforme (velocidad constante), el tiempo que se emplea en recorrer un determinado espacio va expresado por la fórmula

$$t \text{ (tiempo)} = \frac{e \text{ (espacio)}}{v \text{ (velocidad)}}$$

el tiempo que emplean los referidos trenes, desde su paso simultáneo por A, o B, hasta el encuentro en E, vendrá expresado, respectivamente, por

$$t = \frac{x}{60} \qquad \text{y} \qquad t = \frac{x - 120}{40}$$

Evidentemente, estos dos valores de t son iguales, de donde se deduce la ecuación

$$\frac{x}{60} = \frac{x - 120}{40} \qquad \text{cuya raíz es} \qquad x = 360$$

Diremos, por tanto, que el encuentro tendrá lugar a 360 Km. de la estación A.

PROBLEMA 2.° — *De dos poblaciones* A *y* B, *distantes entre sí por carretera* 720 *kilómetros, parten al mismo tiempo dos automóviles, uno al encuentro de otro. Si las velocidades medias respectivas son de* 62 *y* 70 *Km. por hora, ¿cuánto tiempo habrá de transcurrir, desde su partida, para que la distancia que separe a dichos automóviles sea de* 225 *Km.?*

Designemos por x el tiempo pedido. De la fórmula

$$t = \frac{e}{v} \qquad \text{se deduce} \qquad e = v \cdot t$$

Según esto, cuando la distancia que separe a los coches sea de 225 Km., el primero llevará recorridos $62x$ Km., y el segundo, $70x$ Km., por lo que podremos escribir la ecuación

$$720 - (62x + 70x) = 225 \qquad \text{de donde} \qquad x = 3'75$$

Luego, han de transcurrir 3'75 horas, es decir, 3 horas y 45 minutos.

PROBLEMA 3.° — *A las 9 de la noche sale de Madrid un tren con dirección a Barcelona y $\frac{3}{4}$ de hora después sale otro en la misma dirección. Si la velocidad media del primero es de 56 Km.-hora y la del segundo, 64 Km.-hora, ¿cuánto tiempo tardará éste en dar alcance al primero, y a qué distancia de Madrid se verificará el encuentro?* Se supone que en todo el trayecto hay vía doble.

Llamemos x al tiempo pedido. El segundo tren, en el momento del encuentro, llevará recorridos $64\,x$ Km., y el primero, $56\,(x + \frac{3}{4})$ Km. Como estos espacios representan la misma distancia, podremos escribir la ecuación

$$64\,x = 56\,(x + \tfrac{3}{4}) \quad \text{de donde} \quad x = 5'25$$

Luego, el segundo tren tardará 5 horas 15 minutos en dar alcance al primero, y el encuentro se verificará a $5'25 \times 64 = 336$ Km. de Madrid.

88. Problemas de Aritmética mercantil. — Muchos problemas de interés, descuento y otros de Aritmética mercantil se resuelven con facilidad planteándolos algebraicamente. Veamos dos ejemplos.

PROBLEMA 1.° — *Una persona ha prestado la mitad de su capital a interés simple al 6'5 %, los 2/5 de la otra mitad al 6 %, y el resto al 5 %, por todo lo cual recibirá una renta anual de 44.625 ptas. ¿De qué capital se trata?*

Designando por x la cantidad prestada, y recordando la fórmula del interés simple, tendremos:

$$\frac{x}{2} \text{ ptas. prestadas al } 6'5\ \%, \text{ producen } \frac{6'5\,x}{200} \text{ ptas. en un año}$$

$$\frac{2}{5} \times \frac{x}{2} = \frac{x}{5} \text{ ptas. prestadas al } 6\ \%, \text{ producen } \frac{6\,x}{500} \text{ ptas. en un año}$$

$$x - \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{5}\right) = \frac{3\,x}{10} \text{ ptas. prestadas al } 5\ \%, \text{ producen } \frac{15\,x}{1.000} \text{ ptas. en un año}$$

Por consiguiente, podremos escribir la ecuación

$$\frac{6'5\,x}{200} + \frac{6\,x}{500} + \frac{15\,x}{1.000} = 44.625$$

que, resuelta, da $x = 750.000$ pesetas.

PROBLEMA 2.° — *Un señor coloca* 18.000 *ptas. a interés simple al* 4 %; *tres años después coloca* 24.000 *ptas. al* 5 %. *¿Cuánto tiempo deberá transcurrir después de la segunda imposición para que los intereses producidos por ambos capitales sean iguales entre sí?*

Representando por x el tiempo que nos piden, resulta la ecuación

$$\frac{18.000 \times 4 \times (3+x)}{100} = \frac{24.000 \times 5 \times x}{100}$$

o su equivalente

$$18 \times 4 \times (3+x) = 24 \times 5x \quad \text{de donde} \quad x = 4'5$$

Luego, deberán transcurrir 4 años y medio.

89. Vencimiento medio de varias letras. — Al comerciante que haya de pagar varias letras a un mismo acreedor, cada una en su correspondiente fecha de vencimiento, le puede interesar hacerlas todas efectivas en una fecha intermedia, de tal manera que ni él ni su acreedor resulten perjudicados. La determinación de esa fecha intermedia es a lo que llamamos cálculo del *vencimiento medio de varias letras.*

En los problemas de vencimiento medio, se supone que todas las letras cuyo pago quiere hacerse en una sola fecha, están estipuladas al mismo % de descuento, r.

Supongamos que se desean reemplazar varias letras, de valores nominales N_1, N_2, N_3 y vencimientos t_1, t_2, t_3, por una sola letra, de valor nominal $N_1 + N_2 + N_3$ y vencimiento t_m. Para hallar t_m, bastará expresar que el valor actual o efectivo de la letra que vence en la fecha t_m, es igual a la suma de los valores efectivos de aquellas a las cuales reemplaza. Como el valor efectivo de una letra es igual a la diferencia entre el valor nominal y el descuento, tendremos:

$$N_1 + N_2 + N_3 - \frac{(N_1+N_2+N_3)\,rt_m}{36000} = N_1 - \frac{N_1 r t_1}{36000} + N_2 - \frac{N_2 r t_2}{36000} + N_3 - \frac{N_3 r t_3}{36000}$$

Quitando denominadores en esta ecuación (cuya incógnita es t_m), y restando luego de ambos miembros la suma

$$36000\,N_1 + 36000\,N_2 + 36000\,N_3,$$

resulta

$$-(N_1+N_2+N_3)\,rt_m = -N_1 r t_1 - N_2 r t_2 - N_3 r t_3$$

Dividiendo ahora por r y multiplicando por -1, se obtiene

$$(N_1+N_2+N_3)\,t_m = N_1t_1 + N_2t_2 + N_3t_3$$

ecuación que nos permite resolver varios problemas, cuando se conocen todos los elementos menos uno; en particular, despejando t_m, tendremos:

$$t_m = \frac{N_1t_1 + N_2t_2 + N_3t_3}{N_1 + N_2 + N_3}$$

que es la fórmula empleada para hallar la fecha t_m del vencimiento medio de varias letras, con independencia del % r, y cuya estructura coincide con la fórmula del precio medio de una mezcla (2.° curso, núm. 162).

EJEMPLO. — *Una persona debe a otra* 6.000 *ptas., pagaderas al cabo de* 20 *días,* 15.000 *ptas. a los* 35 *días y* 24.000 *ptas. a los* 90 *días, pero conviene con el acreedor en hacer un solo pago, equivalente a la suma de las tres facturas. ¿En qué tiempo deberá efectuarlo para que haya compensación?*

Se trata de un problema de *vencimiento medio,* por lo que, aplicando la fórmula, resulta:

$$t_m = \frac{6.000 \times 20 + 15.000 \times 35 + 24.000 \times 90}{6.000 + 15.000 + 24.000} = 62'33 \text{ días}$$

es decir, prácticamente, deberá efectuar el pago de las 45.000 ptas. a los 62 días

90. Promedios. — Dado un grupo de números, interesa a menudo sustituírlos por uno sólo que sirva para caracterizar a todo el grupo. A este número le llamamos *promedio* entre los dados.

Los promedios más usados son la *media aritmética simple* y la *media aritmética ponderada.*

Media aritmética simple de una serie compuesta de n valores, es el cociente de dividir por n la suma de dichos valores.

Es decir: la media aritmética simple de $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$, será

$$M_s = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n}{n}$$

EJEMPLO. — Si en las cinco veces que fue interrogado un alumno durante una quincena en la clase de Matemáticas, obtuvo las calificaciones de 7, 5, 6, 6 y 5 puntos, le corresponderá al final la nota media de

$$\frac{7 + 5 + 6 + 6 + 5}{5} = 5'8 \text{ puntos}$$

MEDIA ARITMÉTICA PONDERADA. — La media aritmética simple no expresa debidamente en algunos casos el promedio.

En efecto: supongamos, por ejemplo, que en una fábrica se pagan estos 4 tipos de salarios: 48, 54, 62 y 75 ptas. La media aritmética simple de los salarios será

$$(48 + 54 + 62 + 75) : 4 = 59'75 \text{ ptas.}$$

Ahora bien: únicamente en el caso de que haya el mismo número de obreros que cobren cada uno de los salarios indicados, se podrá afirmar que 59'75 ptas. es el salario medio.

Si, por el contrario, suponemos que en dicha fábrica hay 40 obreros cuyo jornal es de 48 ptas., 35 que cobran 54 ptas., 14 que cobran 62 ptas. y 11 que cobran 75 ptas., el verdadero jornal medio sería

$$\frac{48 \cdot 40 + 54 \cdot 35 + 62 \cdot 14 + 75 \cdot 11}{40 + 35 + 14 + 11} = 55'03 \text{ ptas.}$$

El promedio así obtenido se llama *media aritmética ponderada.* Obsérvese que para hallarlo, se ha multiplicado cada valor de la serie por un número, del que se dice es la *frecuencia* o *peso* con que dicho valor figura en la serie.

Así, si los números o valores que tratamos de promediar son v_1, v_2, v_3, ..., v_n y su frecuencia o peso respectivo es f_1, f_2, f_3, ..., f_n, la media buscada será

$$M_p = \frac{v_1 f_1 + v_2 f_2 + v_3 f_3 + \ldots + v_n f_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n}$$

En general, diremos:

Media aritmética ponderada de una serie de valores, es el resultado de multiplicar cada valor por su frecuencia o peso respectivo y dividir luego la suma de los productos obtenidos por la suma de las frecuencias o pesos.

Después de lo dicho, vemos que las fórmulas utilizadas en la obtención del precio medio de una mezcla, de la ley de una aleación y del vencimiento medio de varias letras, se reducen al cálculo de medias ponderadas.

EJERCICIOS

574. Hallar tres números pares consecutivos cuya suma es 78.

575. Hallar dos números cuya suma sea 50 y tales que, restando 5 unidades al mayor para añadírselas al menor, los resultados son iguales.

576. Calcular un número tal que sus $\frac{3}{4}$ aumentados en 5 unidades equivalen a los 5/6 del mismo.

577. Hallar un número cuyo tercio, cuarto y quinto suman 47.

578. La suma de dos números es 50. Si se restan 2 unidades al menor, el resultado es igual a un tercio del mayor. ¿Cuáles son esos números?

579. Tres socios quieren repartirse 100.000 duros. Averiguar lo que corresponderá a cada uno, si el primero ha de tomar 3 veces más que el segundo, y el tercero 2 veces más que el primero.

580. Las edades de dos hermanos suman 21 años. Si se triplica la edad del menor, el resultado excede en 3 años a la edad del mayor. Averiguar cuántos años tiene cada uno.

581. Un hijo tiene 30 años menos que su padre y éste 4 veces la edad del hijo. ¿Cuál es la edad de cada uno?

582. Dividir el número 30 en dos partes tales que el cuadrado de la mayor exceda al de la menor en 600.

583. La edad de una persona es tal que los $\frac{2}{5}$ de dicha edad, menos 1/9 de la que tendrá dentro de un año, es igual a $\frac{1}{3}$ de la que tenía hace 5 años. ¿Qué edad tendrá dicha persona dentro de 5 años?

584 Dividir 7.000 pesetas en 5 partes, de modo que cada una exceda de la anterior en 150 pesetas.

585. Dos albañiles trabajan en la misma pared; el primero realiza 8 m. de obra al día y el segundo, 6 m. Si éste llevaba al primero una ventaja de 14 metros, ¿al cabo de cuántos días la longitud de obra será igual en ambos?

586. Después de vender una persona el tercio de su cosecha de vino, más los 4/7 de lo restante, le quedaron aún 120 hectolitros. ¿Cuántos hectolitros cosechó?

587. Preguntamos a Juan por su edad y la de su amigo Pedro y nos contesta: «Hace un año yo tenía el triple de la edad de Pedro, y dentro de 13 años no tendré más que el doble». ¿Cuál es la edad de los dos amigos?

588. En un colegio hay 364 alumnos. Si aumentara en 6 internos y disminuyera en 5 externos, el número de éstos sería 4 veces el de aquéllos. ¿Cuántos son de cada clase?

589. En una clase hay tres secciones; la primera comprende la tercera parte de los alumnos, la segunda la cuarta parte, y la tercera, 20 alumnos. Hallar el número total de alumnos.

590. Pagué 118 ptas. en billetes de duro y de una peseta. Si el total de billetes fue 54, ¿cuántos hubo de cada clase?

591. Poseo 8.680 ptas. en billetes de 5 y 25 ptas. Si el número de los primeros es al de los segundos como 22 es a 39, ¿cuántos tengo de cada clase?

592. En un corral hay conejos y gallinas. Son en total 53 cabezas y 176 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay?

593. Si se aumenta la longitud de un cuadrado en 4 metros y la anchura en 1'5 m., resulta un rectángulo cuya área es igual a la del cuadrado, más 28 m^2. ¿Qué lado tiene el cuadrado?

594. El año en que nació el matemático Isaac Newton (siglo XVII) está representado por un número de cuatro cifras cuya suma es 13, siendo la cifra de las decenas doble que la de las unidades. ¿En qué año nació Newton?

595. El año en que nació Cervantes (siglo XVI) está representado por un número de cuatro cifras cuya suma es 17. La cifra de las unidades de ese número excede en 3 de la cifra de las decenas; ¿en qué año nació el ilustre escritor?

596. Se han pagado 275 ptas. con 58 billetes de 5 y de 2 pesetas. ¿Cuántos había de cada clase?

597. Dos personas disponen de la misma cantidad de dinero. La primera gasta 2.700 ptas. y la segunda 2.400 ptas.; después de lo cual, la parte sobrante de la segunda es el doble de lo que quedó a la primera. ¿Cuál fue la cantidad inicial?

598. Me faltan 3 ptas. para poder comprar cierto estuche de compases. Si costase los $\frac{2}{3}$ del precio a que se vende, podría adquirirlo y aun me sobrarían 16 pesetas. ¿Cuál es su precio?

599. Las dos cifras de un número suman 15. Si a dicho número le añadimos 9, resulta otro con las mismas cifras, pero escritas en orden inverso. ¿Cuál es el primer número?

600. Hallar un número cuyo tercio y mitad sumen $10\,a$.

601. Hallar dos números consecutivos que, elevados al cuadrado, presenten una diferencia igual a $4\,a + 1$.

602. La edad de un padre es a y la de su hijo b. ¿Dentro de cuánto tiempo será la edad del padre m veces la del hijo?

603. Sobre una línea de ferrocarril marcha un tren de viajeros que lleva la velocidad de 60 Km. por hora. Una hora antes partió de la misma estación un mercancías con velocidad de 35 Km. hora. ¿A qué distancia del punto de partida alcanzará el primer tren al segundo?

604. Un avión de bombardeo pasa sobre un aeródromo enemigo a una velocidad de 240 Km. hora. Inmediatamente se prepara un avión de caza para darle alcance. El avión de caza necesita $\frac{1}{4}$ de hora para preparar su salida, y lleva una velocidad media de 360 Km. h. Averiguar a qué distancia del aeródromo alcanzará el caza al bombardero.

605. Dos trenes salen de Irún hacia Madrid, uno 3 horas antes que el otro. El que sale primero recorre 35 Km./hora, y el otro 50. ¿A que distancia de Irún se encontrarán?

606. De dos estaciones *A* y *B*, distantes entre sí 540 kilómetros, parten al mismo tiempo dos trenes, uno al encuentro de otro. Si las velocidades respectivas son 35 y 50 Km. por hora, ¿cuánto tiempo deberá transcurrir para que la distancia que separe a dichos trenes sea de 268 kilómetros?

607. A las 4 de la mañana sale de Burgos un tren en dirección a Madrid. A las 5 sale otro en la misma dirección. Si la velocidad del primero es de 50 Km.-hora y la del segundo, 60 Km./hora, ¿cuánto tardará éste en dar alcance al primero, y a qué distancia de Burgos se verificará el encuentro?

608. Dos automóviles, cuyas velocidades respectivas son v y v', corren en la misma dirección, y se hallan a la distancia d uno de otro. ¿Cuánto tiempo tardará el primero en alcanzar al segundo? Hacer la discusión del problema, cuando se supone $d > 0$ y v mayor, igual o menor que v'.

609. Hallar el capital que, colocado a interés simple al 3 %, se ha convertido al cabo de 6 años en 14.160 ptas.

610. Dos capitales producen, en conjunto, una renta anual de 2.820 pesetas. El menor está colocado al 5 % y el mayor al 4'5 %. Averiguar estos dos capitales, sabiendo que están en la relación de 2 a 3.

611. Una persona coloca $\frac{1}{3}$ de un capital a interés simple al 5 %, $\frac{1}{4}$ del mismo al 4 %, y el resto al 3 %. Si el total de la renta anual es de 940 ptas., ¿de qué capital se trata?

612. Una persona divide su fortuna en partes proporcionales a 11, 12 y 18, y las presta al 6 %, al 5'5 % y al 4 %, respectivamente. Sabiendo que le corresponde en total una renta anual de 8.160 ptas., se pregunta cuál era su capital.

613. Calcular el vencimiento medio de tres letras de cambio de 15.000 ptas., 24.000 ptas. y 30.000 ptas., que vencen a los 40 días, 80 días y 50 días, respectivamente.

614. Un comerciante efectúa una compra por valor de 27.000 ptas., comprometiéndose a pagar 18.000 ptas. a los 90 días y las 9.000 ptas. restantes a los 150 días. Si quiere pagarlo todo junto, ¿en qué fecha deberá hacerlo?

615. Se tienen las siguientes deudas con el mismo acreedor: 4.800 ptas. a pagar a los 90 días, 6.450 ptas. a los tres meses, 4.260 ptas. a los 120 días y 963'50 ptas. al año. Calcular el vencimiento medio de estos pagos.

616. Al comprar un automóvil por 140.000 ptas., cierta persona se compromete a pagarlo en cuatro plazos iguales, uno al contado y los otros a los 3 meses, a los 7 meses y a los 12 meses. Si desea pagar las 140.000 ptas. en un solo plazo, ¿cuándo deberá hacerlo, para que haya compensación?

617 Un almacenista compra mercancía por valor de 54.000 ptas., pagaderas a los tres meses, pero a los 20 días hace efectivas 42.000 ptas. ¿Cuántos días podrá tardar en abonar las 12.000 ptas. restantes, para que haya compensación?

618. Una persona que debe 18.450 ptas. pagaderas a un cierto plazo, conviene con el acreedor en adelantar 40 días el pago de una parte, para retrasar 3 meses el pago de la otra. ¿Qué cantidad deberá abonar en cada pago?

619. Un comerciante debe una letra que vence a los 45 días, pero conviene con el acreedor en sustituírla por otras tres cuyos importes suman igual que el nominal primitivo. Estas tres letras vencen a los 30, 50 y 60 días, siendo 5.000 pesetas el nominal de la primera y 4.000 el de la tercera. Calcular el nominal de la segunda letra y el primitivo.

620. Calcular el promedio de los siguientes números: 483, 476, 482, 477, 470, 475, 486 y 482.

621. Los beneficios de una empresa en un determinado quinquenio, fueron los siguientes: 1.er año, 200.000 ptas.; 2.º año, 160.000 ptas.; 3.er año, 240.000 ptas.; 4.º año, 300.000 ptas.; y 5.º año, 350.000 ptas. Averiguar el promedio de beneficios obtenido por la empresa durante ese quinquenio.

622. Calcular el precio medio que alcanzan los cereales en el mercado, sabiendo que se han vendido 450 Qm. de trigo al precio de 525 ptas. el Qm.; 200 Qm. de maíz a 325 ptas. el Qm.; 230 Qm. de centeno a 425 ptas. el Qm., y 350 Qm. de arroz a 600 ptas. el Qm. (Hállese la media ponderada de los precios).

623. El número de empleados de una empresa es de 150, y se hallan clasificados así: 60 obreros especializados, con un salario semanal de 749 ptas.; 45 obreros semiespecializados, con un salario semanal de 595 ptas.; y 45 obreros aprendices, con un salario semanal de 434 ptas. Se desea saber el salario semanal medio por obrero.

624. Un dado se ha echado al aire 40 veces y se han obtenido los siguientes resultados: el 1 ha aparecido 6 veces; el 2, 7; el 3, 8; el 4, 6; el 5, 8; y el 6, 5. Hallar la media aritmética ponderada de las experiencias.

11. Sistema de ecuaciones

91. Ecuación de primer grado con dos incógnitas. — Consideremos, por ejemplo, la ecuación

$$3x + 2y = 7$$

Si damos a x un valor cualquiera, como $x = 1$, dicha ecuación se convierte en

$$3 \cdot 1 + 2y = 7$$

Despejando y de esta última, se obtiene

$$y = \frac{7 - 3}{2} = 2$$

lo cual nos dice que $x = 1$, $y = 2$ es una solución de la ecuación considerada, como es fácil comprobar.

Para un nuevo valor de x, por ejemplo $x = 2$, hallaríamos

$$3 \cdot 2 + 2y = 7$$

ecuación en la que a y le corresponde el valor $y = \frac{1}{2}$.

Por consiguiente, otra solución de la ecuación propuesta será

$$x = 2, \qquad y = \tfrac{1}{2}$$

Así como hemos asignado a x los valores 1 y 2, hubiéramos podido darle otro cualquiera; siempre sucederá que a cada valor que atribuyamos a x, encontraremos otro para y. Y, recíprocamente, para cada valor que asignemos arbitrariamente a y, le corresponde otro determinado a x.

Esto equivale a decir que la ecuación tomada como ejemplo tiene infinitas soluciones, o que es indeterminada. Lo mismo sucederá con cualquiera otra ecuación de primer grado con dos incógnitas, y, con mayor razón, si la ecuación tiene más de dos incógnitas.

Es decir, que *una ecuación de primer grado con dos o más incógnitas, admite infinitas soluciones.*

92. Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. — Supongamos ahora dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Sean, por ejemplo,

$$2x + y = 7 \qquad \text{y} \qquad 5x - 3y = 1$$

Cada una de estas ecuaciones, tendrá, según hemos dicho, infinitas soluciones. Ahora bien: no hay por qué suponer que una solución hallada arbitrariamente en una de las ecuaciones, lo sea también de la otra.

Así, el par de valores $x = 1$, $y = 5$, es solución de la ecuación primera y no lo es de la segunda.

Sin embargo, ambas ecuaciones pueden tener alguna solución común. Tal ocurre en este caso con los valores $x = 2$, $y = 3$, ya que

$$2 \cdot 2 + 3 = 7 \qquad \text{y} \qquad 5 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 1$$

De las ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$$

consideradas en conjunto, decimos que forman un *sistema,* y los valores de x e y que satisfacen a la vez a las dos ecuaciones, constituyen la solución de dicho sistema. Evidentemente, un sistema puede estar formado por más de dos ecuaciones.

Resolver un sistema de ecuaciones es hallar los valores de las incógnitas que satisfacen a la vez a todas las ecuaciones que lo forman. Dichos valores constituyen la solución del sistema.

De dos sistemas de ecuaciones decimos que son equivalentes, cuando tienen la misma solución.

93. Resolución de un sistema de dos ecuaciones, en el caso particular en que una de las ecuaciones contiene una sola incógnita. — Sea, por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} 2x + 5 = 1 \\ x - 3y = -17 \end{cases}$$

Resolviendo la primera ecuación, obtenemos para x el valor -2, que sustituído en la segunda, produce

$$-2 - 3y = -17 \qquad \text{de donde} \qquad y = 5$$

El sistema dado tendrá, según esto, la solución $x = -2$, $y = 5$.

En consecuencia, para resolver un sistema de esta clase, procederemos de este modo:

1.° *Se resuelve primero la ecuación de una incógnita.*

2.° *El valor hallado se sustituye en la otra ecuación y se resuelve la que resulta.*

94. Resolución de un sistema de dos ecuaciones en el caso general: Métodos de sustitución y de reducción. — El caso más frecuente es que las dos ecuaciones tengan dos incógnitas. Para resolver un sistema de esta clase, habrá que transformarlo en otro equivalente, una de cuyas ecuaciones contenga sólo una incógnita.

Obtener este segundo sistema se denomina *eliminar* una incógnita, y puede hacerse de varios modos. Veamos los dos más usados.

I. MÉTODO DE SUSTITUCIÓN. — Consideremos, por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$$

Queremos hallar los valores de x e y que verifican simultáneamente a las dos ecuaciones.

Supuesto conocido el valor de x, obtendríamos el de y, deducido de la primera ecuación, mediante la fórmula

$$y = \frac{12 - 2x}{3} \qquad [1]$$

Ahora bien: dicho valor de x, y el hallado para y, constituyen una solución de la ecuación segunda, debiendo cumplirse, por tanto, que

$$3x - 2 \cdot \frac{12 - 2x}{3} = 5$$

La solución de esta ecuación, con una incógnita, será el valor que corresponde a x en el sistema dado.

Resuelta la anterior ecuación, nos da

$$x = 3$$

y sustituyendo x por este valor en la fórmula [1], se obtiene

$$y = \frac{12 - 2x}{3} = \frac{12 - 2 \cdot 3}{3} = 2$$

La solución del sistema será, por consiguiente,

$$x = 3, \qquad y = 2$$

En efecto: si hacemos la comprobación, vemos que

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$$
$$3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5$$

II. MÉTODO DE REDUCCIÓN. — Supongamos primeramente el sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y = -4 \\ 7x - 2y = -20 \end{cases}$$

Como sabemos, resolver este sistema será hallar los valores de x e y que satisfacen a la vez a las dos ecuaciones.

Si suponemos que x e y representan esos determinados valores, al sumar miembro a miembro las dos igualdades que componen el sistema, se obtendrá esta otra igualdad,

$$12x = -24$$

que es una ecuación de primer grado, y que se verifica para $x = -2$.

Llevando este valor a cualquiera de las ecuaciones del sistema, la primera, por ejemplo, se tiene

$$5 \cdot (-2) + 2y = -4$$

de donde se deduce que $y = 3$.

Luego, la solución del sistema será $x = -2$, $y = 3$.

Supongamos en segundo lugar el sistema

$$\begin{cases} 5x - 7y = 20 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

Este sistema tendrá la misma solución que el formado por las ecuaciones que resultan al multiplicar los dos miembros de la primera por 2 (valor absoluto del coeficiente de y en la otra) y los de la segunda por 7 (valor absoluto del coeficiente de y en la primera). Es decir, el sistema dado será equivalente a éste:

$$10x - 14y = 40$$
$$21x - 14y = 84$$

Al restar ahora ordenadamente las dos ecuaciones, se elimina la incógnita y, resultando

$$-11x = -44 \quad \text{de donde} \quad x = 4$$

Reemplazando la incógnita x en cualquiera de las ecuaciones del sistema propuesto, por el valor $x = 4$, hallaremos el de y con solo resolver la ecuación que resulte. De este modo:

$$5 \cdot 4 - 7y = 20 \quad \text{de donde} \quad y = 0$$

Por consiguiente, la solución del sistema es $x = 4$, $y = 0$.

En lugar de eliminar la incógnita y, hubiera sido igual eliminar la x. Para ello, bastaría haber igualado sus coeficientes, multiplicando la primera ecuación por 3 y la segunda por 5.

Cuando los coeficientes de la incógnita que se quiere eliminar no son primos entre sí, en lugar de multiplicar cada ecuación por el coeficiente de la otra, es preferible hallar el m. c. m. de dichos coeficientes, y multiplicar luego cada ecuación por el cociente que resulta al dividir el m. c. m. por el coeficiente de la incógnita a eliminar en la misma ecuación.

Así, en el sistema

$$\begin{cases} 3x - 9y = 15 \\ 5x + 12y = -2 \end{cases}$$

para eliminar la incógnita y, en lugar de multiplicar la primera ecuación por 12 y la segunda por 9, lo haremos por 4 y por 3, respectivamente, ya que

$$\text{m. c. m. } (9 \text{ y } 12) = 36; \qquad 36 : 9 = 4; \qquad 36 : 12 = 3$$

con lo cual se obtiene

$$\begin{array}{rl} & 12x - 36y = 60 \\ & 15x + 36y = -6 \\ \text{sumando:} & \overline{27x \qquad = 54} \end{array}$$

de donde,

$$x = \frac{54}{27} = 2; \qquad y = \frac{15 - 3 \cdot 2}{-9} = -1$$

95. Problemas que dan lugar a un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

PROBLEMA 1.° — *Dos empleados cobran anualmente, en conjunto,* 63.600 *ptas. El primero gastó al cabo del año los* $\frac{2}{3}$ *de su paga y el segundo los* $\frac{7}{8}$ *de la suya. ¿Cuál es la paga anual de cada empleado, si el total de los ahorros de ambos se elevó a* 14.950 *ptas.?*

Llamando x a la paga del primero e y a la del segundo, tendremos

$$\begin{cases} x + y = 63.600 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{8} = 14.950 \end{cases}$$

sistema cuya solución es $x = 33.600$, $y = 30.000$. Por tanto, el primer empleado cobra anualmente 33.600 ptas., y el segundo, 30.000 ptas.

PROBLEMA 2.° — *Las dos cifras de que consta un número suman* 12. *Hallar dicho número, sabiendo que si se escribe invirtiendo el orden de sucesión de sus cifras, el número disminuye en* 36.

Si llamamos x a la cifra de las decenas, e y a la de las unidades, el número pedido será $10x + y$, mientras que el escrito en orden inverso será $10y + x$.

Se puede, por tanto, establecer el sistema

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 10x + y - (10y + x) = 36 \end{cases}$$

que tiene por solución $x = 8$, $y = 4$. Luego, el número pedido es 84.

PROBLEMA 3.° — *Si se aumenta la longitud de un campo rectangular en* 5 *metros y la anchura en* 7 *m., la superficie aumenta en* 830 m^2*; mientras que si se disminuye lo largo en* 8 *m. y lo ancho en* 4 *m., la superficie disminuye en* 700 m^2. *Calcular las dimensiones del referido campo.*

Representemos por x la longitud y por y la anchura, ambas expresadas en metros. La superficie del campo, expresada en metros cuadrados, es igual al producto de las dos dimensiones dichas. Tendremos: $S = xy$.

Cuando las dimensiones se han aumentado, la superficie es $(x+5)(y+7)$, y cuando se han disminuído, $(x-8)(y-4)$.

Luego, podremos escribir, según el enunciado del problema,

$$\begin{cases} (x+5)(y+7) - xy = 830 \\ xy - (x-8)(y-4) = 700 \end{cases}$$

sistema que es equivalente a este otro

$$\begin{cases} 7x + 5y = 795 \\ 4x + 8y = 732 \end{cases}$$

cuya solución $x = 75$, $y = 54$. nos dice que la longitud del campo es 75 metros, y 54 metros su anchura.

PROBLEMA 4.º — *Se han mezclado* 18 *Qm. de una clase de arroz con* 27 *Qm. de otra, para vender el Qm. de la mezcla a* 640 *ptas. Se desea averiguar el precio de cada clase, sabiendo que* 7 *Qm. de la primera cuestan* 970 *ptas. más que* 5 *Qm. de la segunda.*

Representemos por x e y los precios, por quintal métrico, de cada una de las clases de arroz. Se tiene, según las condiciones establecidas en el enunciado del problema:

$$\begin{cases} 18x + 27y = (18+27)\,640 \\ 7x - 5y = 970 \end{cases}$$

La solución de este sistema, $x = 610$, $y = 660$, indica que 610 ptas. y 660 pesetas son los precios que se piden.

EJERCICIOS

Resolver los sistemas siguientes por el método de sustitución:

625. $\begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ 5x + 3y = 21 \end{cases}$

626. $\begin{cases} 2y - 11x = 67 \\ 2x + 5y = 20 \end{cases}$

627. $\begin{cases} 3x + 7y = 2 \\ 7x + 8y = -2 \end{cases}$

628. $\begin{cases} 22x + 15y = 9 \\ 18x + 25y = 71 \end{cases}$

629. $\begin{cases} x = 2 + 6y \\ 3y - 8x = 29 \end{cases}$

630. $\begin{cases} 5x - 8y = 7 \\ x = 1 + y \end{cases}$

631. $\begin{cases} \dfrac{7}{3}x + 4 = y \\ \dfrac{y}{4} - \dfrac{x}{3} = \dfrac{7}{4} \end{cases}$

632. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{4}y = 2 \\ \dfrac{1}{6}x - \dfrac{5}{3}y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

633. $\begin{cases} \dfrac{x-4}{5} = \dfrac{2y+2}{18} \\ \dfrac{x}{6} + \dfrac{y-2}{4} = 3 \end{cases}$

634. $\begin{cases} \dfrac{x-y}{3} - \dfrac{2x+y}{2} = 0 \\ \dfrac{x+2y}{2} - \dfrac{x}{4} = -\dfrac{11}{4} \end{cases}$

635. $\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{4}{y-1}=0$

$\dfrac{5}{2x-3}-\dfrac{7}{2y+13}=0$

636. $\dfrac{x+y-9}{2}=\dfrac{y-x-6}{3}$

$\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{2y}{6}-\dfrac{x+y}{3}$

Resolver los sistemas siguientes por el método de reducción:

637. $3x+7y=-23$
$5x+4y=-23$

638. $2x-3y+5=0$
$x+2y=2$

639. $6x+9y=-14$
$3x-6y=14$

640. $6x+2y=-3$
$5x-3y=-6$

641. $2x+5y=0$
$3x-2y=-19$

642. $4x=13-3y$
$2x-5y=4\frac{1}{3}$

643. $\dfrac{x}{6}-\dfrac{y}{3}=1$

$3x+5y=9$

644. $\dfrac{2x}{3}+\dfrac{3y}{4}=-\dfrac{7}{2}$

$\dfrac{x}{4}-\dfrac{2y}{5}=\dfrac{11}{2}$

645. $\dfrac{4y+1}{2}-\dfrac{3x+1}{3}=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{2x-1}{2}-\dfrac{4y-1}{3}=\dfrac{1}{2}$

646. $10x-\dfrac{y-5}{7}=11$

$8y-\dfrac{x+3}{4}=-17$

Resolver los sistemas siguientes por el método que se prefiera:

647. $x-y=6$
$x+y=80$

648. $3x+2y=32$
$3x-4y=-10$

649. $2x+y=7$
$5x-3y=1$

650. $4x+3y=40$
$6x+7y=100$

651. $4x-5y=45$
$7x-3y=96$

652. $7x+2y=31$
$5x+3y=30$

653. $6x+7y=79$
$5x-11y=49$

654. $3x+2y=38$
$5x-7y=22$

655. $93-21x=6y$
$60-10x=6y$

656. $5x-(8y+16)=0$
$3x+(2y-30)=0$

657. $x+y=22$
$x-2y=1$

658. $4x-6y+10=0$
$8x+18y-70=0$

659. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{5}=1$

$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{7}=1$

660. $\dfrac{2x}{5}+\dfrac{5y}{6}+\dfrac{1}{2}=0$

$\dfrac{x}{6}-\dfrac{5y}{9}-\dfrac{5}{2}=0$

661. $\dfrac{4x}{3}+\dfrac{y}{5}=7$

$\dfrac{2x}{3}+\dfrac{5y}{4}=-\dfrac{9}{4}$

662. $\dfrac{3x}{2}+\dfrac{4y}{3}+1=0$

$\dfrac{2x}{3}+\dfrac{y}{4}=\dfrac{7}{12}$

663. $\dfrac{2x-7y}{3}=\dfrac{x+3y}{21}$

$\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{x-y+4}{5}$

664. $6'5+2y=\dfrac{x+3}{4}$

$4x-\dfrac{y+3}{4}+4=0$

Resolver los siguientes sistemas literales:

665. $bx+ay=2ab$
$ax+by=a^2+b^2$

666. $mx-ny=m^2-n^2$
$nx-my=0$

667. $bx-ay-b^2=0$
$ax+by-bx=a^2$

668. $ax+by=a+b$
$abx+aby=a^2+b^2$

Resolver los problemas siguientes por medio de un sistema de ecuaciones:

669. Hallar dos números tales que, si se divide al primero por 5 y al segundo por 4, la suma de los cocientes es 6; y si se multiplica al primero por 3 y al segundo por 2, la suma de los productos es 69.

670. Un padre tiene el triple de la edad de su hijo, Si tuviera el padre 30 años menos y el hijo 8 años más, los dos tendrían las mismas edades. ¿Cuál es la edad de cada uno?

671. Una canoa ha empleado 20 minutos para descender por un río, en un recorrido de 7.200 metros. Para volver, contra corriente, tarda 30 minutos. ¿Cuál es la velocidad de la canoa y cuál la de la corriente?

672. Hallar dos números cuya suma es 40 y cuya diferencia es igual a $\frac{2}{3}$ del mayor.

673. La suma de dos números es 21. Si de 8 veces el primero, más el segundo, se resta 8 veces el segundo, más el primero, el resto es 63. ¿Cuáles son estos números?

674. La diferencia de dos números es 18. Si se les aumenta a ambos en 4, el mayor se transforma en el cuádruplo del menor. ¿Cuáles son esos números?

675. En un número comprendido entre 100 y 1.000, la cifra de las decenas es cero y la suma de las otras dos es 11. Al invertir el orden de sus cifras, se obtiene un número que excede al primero en 495. ¿De qué número se trata?

676. Hallar la capacidad de dos vasijas que contienen vino, sabiendo que los $\frac{3}{8}$ de la primera equivalen a los 3/5 de la segunda, y que los $\frac{2}{3}$ de la primera contienen 40 litros más que los 4/5 de la segunda.

677. Una persona presta parte de su capital, a interés simple, al 4 %, y el resto al 3 %. Logra de este modo una renta anual de 1.450 pesetas. Prestando la primera parte al 3 %, y la segunda al 4 %, dicha renta disminuiría en 100 pesetas. ¿Cuáles son esas partes?

678. Hallar los dos factores de un producto, sabiendo que el segundo es los 4/5 del primero, y que si se aumenta a cada factor en una unidad, el producto aumenta en 28.

679. Una persona deja al morir 47.800 ptas., a repartir entre sus dos hijos, de 13 y 16 años; de tal modo, que la parte de cada uno, colocada entonces a interés simple, al 3 %, hasta su mayoría de edad *(21 años)*, produzca intereses que, sumados con los capitales respectivos, resulten cantidades iguales. ¿Cuáles son las partes?

680. Un comerciante compra dos piezas de paño cuya longitud total es 306 m. Después de haber separado 24 m. de la primera y 132 de la segunda, comprueba que la longitud de lo que resta de la primera es doble de lo que queda de la segunda. ¿Cuál es la longitud de cada pieza?

681. Determinar la velocidad y la longitud de un tren que ha tardado 7 segundos en pasar por un punto; y 25 segundos en atravesar un puente de 378 m. de longitud.

682. Un comerciante pide prestado un capital al 8 %. Al fin del primer año invierte 2.560 ptas. para pagar los intereses y reintegrar parte del capital. Al terminar el segundo año entrega a su acreedor 5.400 ptas., con lo cual queda satisfecha toda la deuda. ¿Cuál fue el capital prestado?

683. El oro pierde al introducirlo en el agua 0'051 de su peso, y la plata, 0'095. Averiguar la cantidad de oro y plata que tiene un objeto de 6 gramos de peso, si pierde 0'35 gramos al introducirlo en agua.

684. Antonio dice a José: «Yo tengo dos veces la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes. Cuando tú tengas la edad que yo tengo ahora, la suma de las dos edades será 63. ¿Cuáles son nuestras edades?».

685. Calcular los lados de un rectángulo tal que, si se aumenta la base en 5 m. y se disminuye la altura en 5 m., la superficie no varía; mientras que si se aumenta la base en 5 m. y se disminuye la altura en 4, la superficie aumenta en 24 m^2.

686. Dos peatones parten al mismo tiempo de los puntos A y B, distantes 27 Km. Cuando ambos caminan en la misma dirección, uno encuentra al otro al cabo de 9 horas; mientras que, si caminan en dirección opuesta, se encuentran a las 3 horas. ¿Cuáles son sus velocidades?

687. Dos capitales se diferencian en 9.450 ptas. Se sabe que si se colocan a interés simple, al mismo tanto por ciento, el primero durante 4 meses y el segundo durante 13 meses, ambos producen el mismo interés. ¿Cuáles son esos capitales?

688. El perímetro de un triángulo isósceles es 16 dm., y la altura, 4 dm. Averiguar los lados de dicho triángulo.

689. En un corral existen animales de 4 y de 2 patas (gallinas y conejos). Si se cuentan las cabezas, son 20; si las patas, son 54. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

GEOMETRÍA

12. Aplicaciones de la semejanza

97. Revisión de la semejanza de figuras planas. — A manera de resumen, exponemos aquí algunas ideas fundamentales sobre la semejanza de figuras planas.

Para un centro O y una razón de homotecia k, decimos que dos figuras F y F' son homotéticas, si se cumplen las siguientes condiciones:

1.ª A cada punto de F corresponde uno de F'.

2.ª Las rectas que unen puntos correspondientes pasan por el centro O.

3.ª La razón de los segmentos determinados en cada una de dichas rectas por el centro O y dos puntos correspondientes es igual a k, es decir

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \dots k.$$

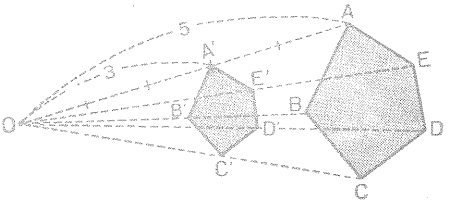


FIG. 6

Las figuras pueden estar situadas a un mismo lado de O (homotecia directa) o a distinto lado (homotecia inversa).

Si dos polígonos son homotéticos (fig. 6):
a) Los lados homólogos son paralelos.
b) Los ángulos homólogos son iguales.
c) Los lados homólogos son proporcionales.

Dos figuras son semejantes cuando una de ellas es igual a una homotética de la otra.

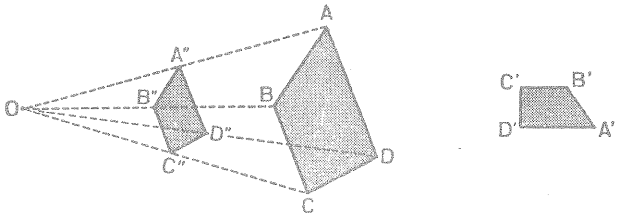


FIG 7

Así, en la figura 7, por ser homotéticos los polígonos $ABCD$ y $A''B''C''D''$, todo polígono $A'B'C'D'$ igual al segundo, será semejante al primero.

Si dos polígonos son semejantes:
a) Los ángulos homólogos son iguales.
b) Los lados homólogos son proporcionales.

Recíprocamente: Dos polígonos son semejantes, cuando sus ángulos, considerados en un determinado orden de colocación, son respectivamente iguales, y los lados que los forman son proporcionales.

Dos polígonos regulares de igual número de lados son siempre semejantes.

Si en dos polígonos semejantes, a partir de dos vértices homólogos, se trazan todas las diagonales posibles, los dos polígonos quedan descompuestos en igual número de triángulos semejantes e igualmente dispuestos (figura 8).

La razón de los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a la razón de semejanza.

La razón de las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

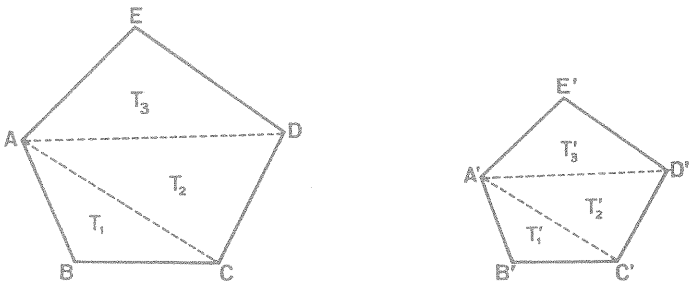


FIG 8

98. Cuarto proporcional a tres segmentos: su construcción. — Dados tres segmentos *a*, *b* y *c*, se llama *cuarto proporcional* al segmento *x* que cumple la condición

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Construcción del cuarto proporcional a tres segmentos dados. Sean *a*, *b* y *c* (fig. 9) los tres segmentos conocidos. Podemos proceder de dos maneras:

1) Trazando dos semirrectas con el origen común en *A*, tomaremos en una de ellas, a partir de *A*, dos segmentos consecutivos *AB* y *BC*, iguales respectivamente a *a* y *b*. Sobre la otra, tomaremos el *AD*, igual a *c*.

Bastará luego unir *B* con *D* y trazar por *C* la paralela *CE* a *BD*. Habremos determinado así el segmento *DE*, que cumple las condiciones arriba indicadas.

En efecto: los segmentos *AB*, *BC*, *AD* y *DE* pueden considerarse como interceptados en las rectas *AC* y *AE* por las paralelas *EC*, *DB* y el punto *A*, por lo que, según el teorema de Tales, se verifica

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$$

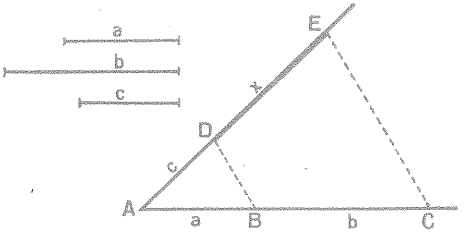


FIG. 9

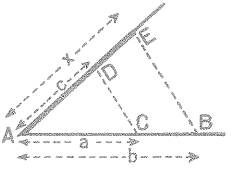


FIG. 10

2) En vez de tomar consecutivamente los segmentos *a* y *b* sobre *AB*, podemos llevarlos a partir del mismo origen *A*, como se indica en la figura 10. Entonces, la solución pedida será $x = AE$, ya que en efecto, según el teorema de Tales, se tiene:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AE}$$

99. Tercero proporcional a dos segmentos: su construcción. — Dados dos segmentos a y b, se llama *tercero proporcional* respecto de ellos, al segmento x, tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

Construcción. La construcción del tercero proporcional es un caso particular del problema anterior, cuando es $b = c$.

100. División de un segmento en partes proporcionales a otros segmentos dados. — Sea AB (figura 11) el segmento que deseamos dividir en partes proporcionales a los segmentos m, n y p.

El problema se reduce a hallar tres segmentos x, y, z, tales que

$$x + y + z = AB$$

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$$

Para conseguirlo, trazaremos por el punto A una semirrecta cualquiera AC que forme ángulo con AB, y en ella tomaremos sucesivamente los segmentos

$$AD = m \qquad DE = n \qquad EF = p$$

Uniremos luego B con F, y por los puntos E y D trazaremos paralelas a BF. De este modo, obtendremos los segmentos x, y, z, que cumplen la condición requerida, pues, en virtud del teorema de Tales, se verifica que

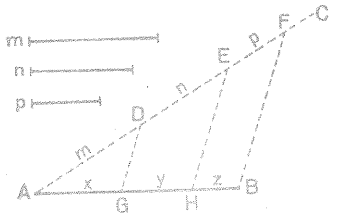


FIG. 11

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$$

Cuando en lugar de los segmentos m, n, p, nos dan números, como por ejemplo 3, 5, 8, tomando como unidad un segmento cualquiera, se hallarán los segmentos m, n, p, iguales respectivamente a 3, 5, 8 unidades, y luego se procederá como se ha indicado más arriba.

101. Construcción de polígonos semejantes. — Para construir un polígono semejante a otro dado según una razón o escala conocida, el método más sencillo es construir un polígono homotético al primero que satisfaga las condiciones del problema.

Supongamos, por ejemplo, que se quieren construir pentágonos semejantes a los designados por $ABCDE$ en las figuras 12, 13 y 15, dándonos la razón de semejanza, $k = 3/5$.

1.° *El centro de homotecia lo situamos fuera del polígono* (figura 12). — Por uno de los vértices del polígono dado, el A por ejemplo, trazamos una semirrecta en dirección conveniente. A partir de A tomamos sobre ella 5 segmentos iguales; el extremo O del último será el centro de homotecia. Uniremos luego el punto O con los restantes vértices del polígono y tomaremos el punto A' sobre la recta OA, situado en la tercera división a partir de O. Bastará después trazar la paralela $A'B'$ al lado AB, y a continuación las $B'C'$, paralela a BC, $C'D'$, paralela a CD, $D'E'$, paralela a DE, y $E'A'$, paralela a EA.

De este modo habremos obtenido el polígono $A'B'C'D'E'$ que es semejante al $ABCDE$, siendo 3/5 la razón de semejanza.

2.° *El centro de homotecia lo situamos en un vértice del polígono* (figura 13). — Dividiremos en 5 partes iguales a uno de los lados que convergen en dicho punto, y tomaremos el punto B' de la tercera división.

Trazadas luego todas las diagonales AC y AD posibles, desde el vértice A, construiremos por B' la paralela $B'C'$ al lado BC; a continuación trazaremos la $C'D'$, paralela a CD y la $D'E'$, paralela a DE.

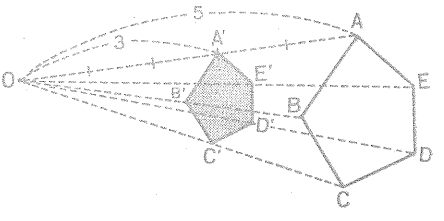


FIG 12

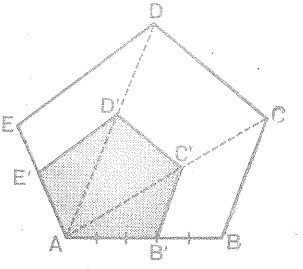


FIG 13

Se habrá formado así el polígono $AB'C'D'E'$ que es semejante al $ABCDE$, siendo 3/5 la razón de semejanza.

La determinación del punto B' puede hacerse directamente, sin tener que dividir en partes iguales el lado AB. Bastará aplicar cualquiera de las dos construcciones indicadas en el párrafo 100 para obtener el *cuarto proporcional* a tres segmentos dados. Así, en el caso de ser $k = 3/5$, habrá de resultar

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{3}{5} \quad \text{o sea, permutando,} \quad \frac{5}{3} = \frac{AB}{AB'}$$

luego, AB' es el cuarto proporcional respecto de 5, 3 y AB (fig. 14).

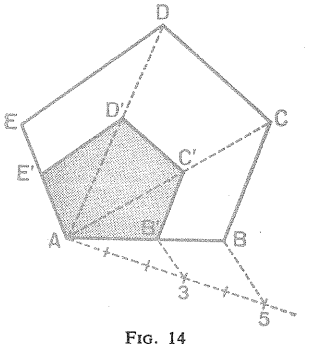


FIG. 14

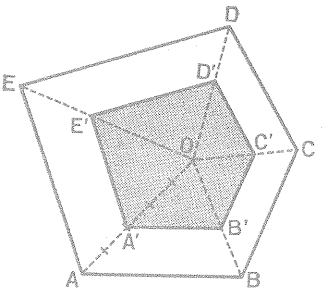


FIG. 15

3.° *El centro de homotecia lo situamos en el interior del polígono* (figura 15). — Por uno de los vértices del polígono, el A por ejemplo, trazamos una semirrecta hacia el interior del polígono, y a partir de A tomamos sobre ella 5 segmentos iguales; el extremo O del último será el centro de homotecia. Uniremos luego O con los restantes vértices del polígono y tomaremos el punto A' sobre la recta OA, situado en la tercera división a partir de O. Bastará después trazar la paralela $A'B'$ al lado AB, y a continuación las $B'C'$, paralela a BC; $C'D'$, paralela a CD; $D'E'$, paralela a DE, y $E'A'$, paralela a EA.

Resulta así el polígono $A'B'C'D'E'$ semejante al $ABCDE$, teniendo por razón de semejanza $k = 3/5$.

La construcción efectuada en los tres casos precedentes se llama *reducir* el polígono dado a la razón 3/5. Cuando la razón de semejanza es mayor que 1, la operación se denomina *ampliar* la figura en dicha razón.

Si en lugar de la razón $k = 3/5$ se hubiera tratado, por ejemplo, de $k = 8/5$, para determinar el punto A' de las figuras 12 y 15, hubiéramos tenido que pro-

longar en tres divisiones más el segmento OA, y desde la división 8 hubiéramos trazado paralelas a los lados del polígono $ABCDE$ hasta cortar a las prolongaciones de los segmentos OB, OC, OD y OE.

Supuesta la misma razón 8/5, el punto B' de la figura 12 se encontrará sobre la prolongación del lado AB, en la división 8. Para obtener luego los vértices C', D' y E', bastará trazar paralelas a los lados del polígono primitivo, hasta cortar a las prolongaciones de OC, OD y OE.

EJERCICIOS

690. Construir la figura homotética de un cuadrilátero dado, en la razón 3/5, y siendo el centro de homotecia, 1.º un punto exterior, 2.º un punto interior, 3.º uno de los vértices.

691. ¿Cuál es la figura homotética de una circunferencia? Razonar la contestación.

692. ¿Cómo son, entre sí, dos ángulos formados por rectas homólogas en dos figuras homotéticas? Razónese la respuesta.

693. Cuando la razón de homotecia es igual a 1, ¿qué produce una figura por homotecia? ¿Y cuándo la razón es -1? Comprobarlo con un triángulo.

694. Dos figuras homotéticas de una tercera, ¿cómo son entre sí? ¿Y dos figuras homotéticas de una tercera respecto a centros distintos y a una misma razón de homotecia?

695. La razón de semejanza de dos polígonos es $\frac{13}{19}$. ¿Cuál será la longitud de un lado del primero, si su homólogo del segundo mide 76 milímetros?

696. Dos hexágonos semejantes tienen por razón de semejanza $k = \frac{2}{3}$. Hallar las medidas de los lados del mayor, sabiendo que las del menor son 6, 10, 14, 22, 24 y 30 centímetros.

697. Los lados de un pentágono miden 3, 7, 8, 6 y 15 cm. Calcular el perímetro de otro pentágono semejante, sabiendo que su lado mayor mide 20 cm.

698. Dos pentágonos son semejantes, siendo las medidas de los lados del menor 3, 4, 5, 6 y 7 metros. ¿Cuánto miden los lados del mayor, si su perímetro tiene 45 metros?

699. La razón de semejanza de dos polígonos semejantes es 3/7. Si el perímetro del primero es 93 cm., ¿cuál será el del segundo?

700. La sombra de una torre tiene en un momento dado una longitud de 18 metros, y la de un palo de 1 m., colocado verticalmente, es de 1'60 m. ¿Qué altura tiene la torre?

701. Un poste de 3'20 m., colocado verticalmente proyecta una sombra de 2 metros y 8 decímetros. ¿Cuál será la altura de un campanario que en el mismo instante proyecta una sombra de 18 m. 9 dm.?

702. Construir un segmento que sea cuarto proporcional a otros tres dados, cuyas longitudes son 20, 25 y 34 mm., respectivamente. Calcular luego por Aritmética la medida de dicho segmento.

703. Construir un segmento que sea tercera proporcional a otros dos cuyas medidas son 30 y 27 milímetros. Calcular luego su medida numéricamente.

704. Dividir el segmento $AB = 8$ cm. en partes proporcionales a los segmentos $a = 15$ mm., $b = 26$ mm., $c = 17$ mm. y $d = 1$ cm.

705. Dado el segmento $AB = 6$ cm., dividirlo en partes proporcionales a los números 1, 3 y 7.

706. Se tiene un trapecio $ABCD$ cuyas bases BC y AD miden, respectivamente, 40 m. y 30 m. ¿Cuánto medirá la altura h de dicho trapecio, sabiendo que la altura h' del triángulo PAD que se obtiene prolongando los lados no paralelos AB y DC, mide 48 m.?

707. ¿En qué razón estarán las áreas de dos triángulos semejantes cuyas bases respectivas miden 40 m. y 30 m.? Comprobarlo con los triángulos PBC y PAD que se forman al construir la figura correspondiente al ejercicio anterior.

708. Las áreas de dos triángulos semejantes son 9.702 m^2 y 12.672 m^2. ¿Cuál será su razón de semejanza?

709. Un lado de un polígono mide 28 mm. ¿Cuál será la longitud del lado homólogo en un polígono semejante cuya área sea 9 veces la del primero?

710. El lado AB de un polígono mide 12 cm., y su homólogo $A'B'$, en un polígono semejante, 7 cm. Sabiendo que el área de este segundo polígono es igual a 5.439 cm^2, se desea saber cuál es la del primero.

711. Construir un pentágono cualquiera y luego otro semejante a él cuya razón de semejanza sea $\frac{3}{4}$. Empléese el primer procedimiento señalado en el texto.

712. Dado un hexágono cualquiera, construir otro semejante cuya razón de semejanza sea $\frac{5}{8}$. Empléese el segundo procedimiento.

713. Construir un cuadrilátero semejante a otro dado y cuya razón de semejanza sea $k = 5/3$. Empléese el primer procedimiento.

714. Construir un pentágono semejante a otro dado y cuya razón de semejanza sea $k = 3/2$. Empléese el segundo procedimiento.

715. Construir un hexágono semejante a otro dado y cuya razón de semejanza sea $k = \frac{2}{5}$. Empléese el tercer procedimiento.

716. Construir un pentágono semejante a otro dado y cuya razón de semejanza sea $k = 8/5$. Empléese el tercer procedimiento.

13. Puntos notables de un triángulo

102. Idea de lugar geométrico. — La frase *lugar geométrico* es sinónima de esta otra: *conjunto de todos los puntos que tienen una propiedad común;* pero solamente se usa para los conjuntos que forman líneas (rectas, circunferencias, etc.). Según esto, diremos:

Se denomina lugar geométrico, a la línea formada por todos los puntos que tienen una misma propiedad.

Para demostrar que una línea dada es el lugar geométrico de los puntos que poseen una cierta propiedad, se han de probar dos cosas:

1.° Que todos los puntos de la línea tienen la propiedad mencionada.

2.° Que todos los puntos que tienen esa propiedad pertenecen a la línea.

EJEMPLOS DE LUGARES GEOMÉTRICOS:

1.° *El lugar geométrico de los puntos de un plano que se encuentran a una distancia* r *de un punto fijo* O, *es una circunferencia de radio* r *y centro* O (fig. 16).

2.° *El lugar geométrico de los puntos de un plano equidistantes de dos fijos* A *y* B, *es la mediatriz del segmento* AB *que éstos determinan* (fig. 17).

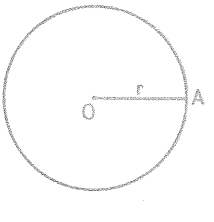


FIG. 16

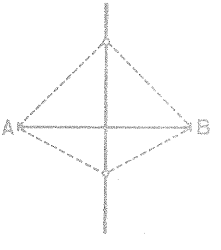


FIG. 17

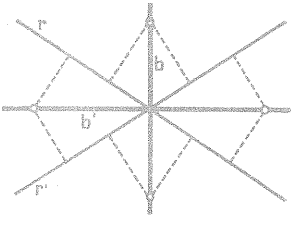


FIG. 18

3.° *El lugar geométrico de los puntos de un plano equidistantes de dos rectas* r *y* r' *que se cortan, es el conjunto de las dos bisectrices* b *y* b' *de los ángulos formados por aquéllas* (fig. 18).

FIG. 19

FIG. 20

4.° *El lugar geométrico de los puntos de un plano que distan de una recta* AB *una longitud* m, *es el conjunto de las dos paralelas a la recta dada, trazadas una a cada lado y a la distancia* m (fig. 19).

5.° *El lugar geométrico de los puntos de un plano equidistantes de dos rectas paralelas* AB *y* CD, *es una recta paralela* EF *equidistante de ellas* (fig. 20).

6.° *El lugar geométrico de los puntos de un plano que unidos con los extremos de un segmento rectilíneo* AB, *determinan ángulos iguales a uno dado* α, *es el conjunto de los dos arcos capaces de dicho ángulo, construídos uno a cada lado del segmento AB* (fig. 21).

7.° *El lugar geométrico de los puntos de un plano que unidos con los extremos de un segmento rectilíneo* AB, *determinan ángulos iguales a un recto, es una circunferencia trazada sobre dicho segmento como diámetro.*

8.° *El lugar geométrico de los centros de las circunferencias de radio* r *que pasan por* O, *es la circunferencia de radio* r *y centro* O (fig. 22).

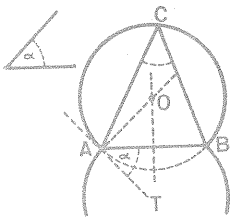


FIG. 21

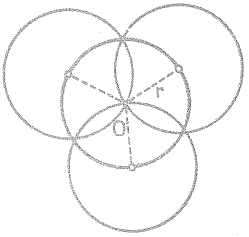


FIG. 22

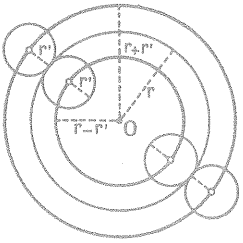


FIG. 23

9.° *El lugar geométrico de los centros de las circunferencias de radio* r', *tangentes exteriores (o interiores) a una circunferencia dada de radio* r, *es otra circunferencia concéntrica a la anterior y de radio* r + r' (*o* r − r'). Fig. 23.

103. Mediatrices: circuncentro. — Recordemos que se llama *mediatriz* de un segmento a la perpendicular en su punto medio.

Las mediatrices de los lados de un triángulo suelen llamarse mediatrices del triángulo.

104. Propiedad. — *Las mediatrices de un triángulo concurren en un punto que equidista de los tres vértices* (fig. 24).

Hipót. [1]: DD', EE', FF', mediatrices del $\triangle ABC$.

Tesis: Las mediatrices se cortan en O. $AO = BO = CO$

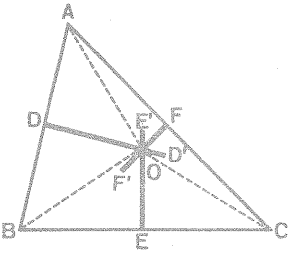


FIG. 24

Las mediatrices DD' y EE' se cortarán en un punto O, porque, de lo contrario, las rectas AB y BC serían paralelas o se confundirían en una sola. Uniendo dicho punto O con los vértices A, B y C, se tiene:

$AO = BO$, por pertenecer O a la mediatriz DD'
$BO = CO$, por pertenecer O a la mediatriz EE'
$\therefore$ [2] $AO = BO = CO$

Luego, el punto O equidista de los tres vértices y, por tanto, pertenece a las tres mediatrices.

El punto de intersección de las mediatrices de un triángulo se llama *circuncentro*, por ser el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

105. Alturas: ortocentro. — Se llaman *alturas* de un triángulo a los segmentos de perpendiculares a los lados, trazadas desde los respectivos vértices opuestos.

106. Propiedad. — *Las tres alturas de un triángulo concurren en un punto* (figura 25).

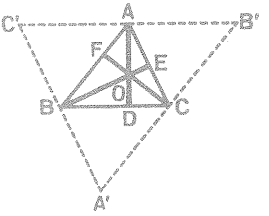


FIG. 25

Hipót.: AD, BE, CF, alturas del $\triangle ABC$.

Tesis: Las alturas se cortan en O.

(1) Recuérdese que *hipótesis* es la expresión de los elementos o condiciones que se suponen en el teorema que se quiere demostrar, y *tesis* es la verdad que se deduce de la hipótesis.
(2) El signo $\therefore$ empleado en Matemáticas quiere decir *por consiguiente*.

Para reducir este caso al de las mediatrices, tracemos por los vértices A, B, C, paralelas a los lados opuestos; así se obtiene un nuevo $\triangle A'B'C'$, cuyos lados son respectivamente paralelos a los lados del triángulo dado. Luego:

$$BC = C'A, \text{ por ser } \| \text{ comprendidas entre } \|$$
$$B\bar{C} = AB', \text{ por ser } \| \text{ comprendidas entre } \|$$
$$\therefore C'A = AB', \text{ por ser ambas iguales a } BC$$

De la última igualdad se deduce que A es el punto medio de la recta $C'B'$, y del mismo modo se demostraría que B y C son los puntos medios de $C'A'$ y $A'B'$.

Por otra parte, las alturas del $\triangle ABC$ son perpendiculares a los lados del $\triangle A'B'C'$, por ser los lados de estos dos triángulos respectivamente paralelos. Luego, las alturas del $\triangle ABC$ son las mediatrices del $\triangle A'B'C'$, y por tanto, se cortan en un mismo punto, el cual puede ser interior o exterior al triángulo.

El punto en que concurren las alturas de un triángulo recibe el nombre de *ortocentro*.

107. Medianas: baricentro. — Se llaman *medianas* de un triángulo a los segmentos determinados por el punto medio de cada lado y el vértice opuesto.

108. Propiedad. — *Las medianas de un triángulo se cortan en un punto situado a los dos tercios de cada una, a partir del vértice respectivo* (figura 26).

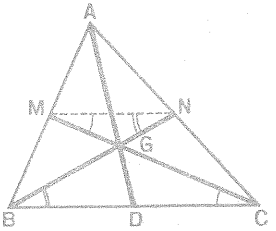


FIG. 26

Hipót.: AD, BN, CM, medianas.

Tesis: Las medianas se cortan en G; $AG = \frac{2}{3} AD$, $BG = \frac{2}{3} BN$, $CG = \frac{2}{3} CM$

Dos medianas cualesquiera, por ejemplo BN y CM, se cortan en un punto G, puesto que no son paralelas. El segmento MN, cuyos extremos son los puntos medios de los lados AB y AC, será paralelo al lado BC e igual a su mitad, es decir, que $MN = \frac{1}{2} BC$.

Luego, los triángulos GMN y GBC son semejantes y, por la proporcionalidad de los lados homólogos, al ser $BC=2\,MN$, también $BG=2\,GN$ y $CG = 2\,GM$, o lo que es lo mismo:

$$BG = \tfrac{2}{3}\,BN \quad \text{y} \quad CG = \tfrac{2}{3}\,CM$$

Por igual razonamiento, la tercera mediana AD corta a una cualquiera de las otras dos a los $\frac{2}{3}$ de su longitud; luego, pasa también por el punto G, donde se encuentran los dos tercios de las dos primeras, a partir del vértice respectivo.

El punto en que concurren las tres medianas de un triángulo se denomina *baricentro* o *centro de gravedad* del triángulo, porque es el punto donde debe apoyarse, supuesto de materia uniforme, para quedar en equilibrio.

109. Bisectrices: incentro y excentros. — Suelen llamarse *bisectrices interiores* de un triángulo a las bisectrices de sus ángulos interiores, y *bisectrices exteriores* a las bisectrices de los ángulos exteriores.

110. Propiedades. — I. *Las bisectrices interiores de un triángulo concurren en un punto que equidista de los tres lados* (fig. 27).

Hipót.: AD, BE, CF, bisectrices.
Tesis: Las bisectrices se cortan en O.
$OM = ON = OP$

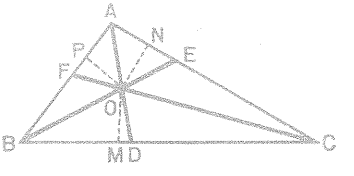


FIG. 27

Las bisectrices BE y CF se cortan en un punto O, puesto que no son paralelas. Tracemos las rectas OM, ON y OP respectivamente perpendiculares a los lados BC, CA y AB. Los puntos de la bisectriz BE equidistan de los lados AB y BC, y los de la bisectriz CF equidistan de los lados BC y AC. Por tanto:

$$OM = OP, \text{ por la bisectriz } BE$$
$$OM = ON, \text{ por la bisectriz } CF$$
$$\therefore\ OM = ON = OP$$

Luego, el punto O equidista de los tres lados y, por tanto, pertenece a las tres bisectrices.

El punto de intersección de las bisectrices de un triángulo se denomina *incentro*, por ser el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.

II. *Las bisectrices de dos ángulos exteriores de un triángulo y la bisectriz del ángulo interior no adyacente a ellos, concurren en un punto equidistante de los tres lados* (fig. 28).

Hipót.: AH y CF, bisectrices de los ángulos exteriores DAC y ECA. BG, bisectriz del ángulo interior B.

Tesis: AH, CF y BG se cortan en O_1; $O_1M = O_1N = O_1P$.

Como la suma de los ángulos exteriores DAC y ECA no puede llegar a valer cuatro rectos, la de sus mitades será inferior a dos rectos; por tanto, las bisectrices de aquellos ángulos necesariamente han de cortarse en un punto O_1.

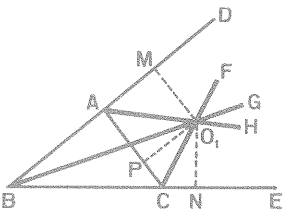


FIG. 28

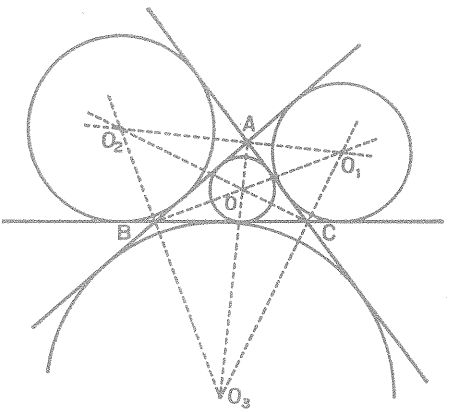


FIG. 29

Tracemos las perpendiculares O_1M, O_1N y O_1P a los lados del triángulo ABC. Los puntos de la bisectriz AH equidistan de BD y AC, y los de la bisectriz CF equidistan de BE y AC. Por tanto:

$$O_1M = O_1P, \text{ por la bisectriz } AH$$
$$O_1P = O_1N, \text{ por la bisectriz } CF$$
$$\therefore\ O_1M = O_1N = O_1P$$

Luego, el punto O_1 equidista de los tres lados del $\triangle ABC$, perteneciendo, por tanto, a la bisectriz BG del ángulo interior B.

Del mismo modo se demostraría que O_2 (fig. 29) equidista de los tres lados del $\triangle ABC$ y se halla en las bisectrices AO_2, BO_2 y CO_2; y también que O_3 equidista de los tres lados del mismo triángulo y pertenece a las bisectrices BO_3, CO_3 y AO_3.

Los puntos O_1, O_2 y O_3 reciben el nombre de *excentros* del triángulo, y sirven para trazar, haciendo centro en ellos, circunferencias que son tangentes a un lado y a las prolongaciones de los otros dos.

111. Circunferencias tangentes a tres rectas. — Lo dicho en el párrafo anterior nos sirve para resolver el siguiente

PROBLEMA. — *Construir las circunferencias tangentes a tres rectas que se cortan, dos a dos, formando un triángulo* (fig. 29).

Según acabamos de ver, hay cuatro puntos que equidistan de estas tres rectas: el punto O, intersección de las tres bisectrices interiores del triángulo ABC, y los puntos O_1, O_2, O_3, intersecciones de las bisectrices de cada dos ángulos exteriores con la del ángulo interior no adyacente a ellos.

En consecuencia, bastará tomar esos cuatro puntos como centros, y por radios las distancias de cada uno a las rectas dadas, para obtener cuatro circunferencias tangentes a dichas rectas.

La determinación de los referidos centros se hace con facilidad, ya que al trazar las bisectrices de los ángulos exteriores, se obtiene un triángulo $O_1O_2O_3$ cuyos vértices son tres de los centros buscados. Para hallar O, bastará unir B con O_1, C con O_2 y A con O_3, pues se encuentra en la intersección de las tres rectas que resultan.

* * *

EJERCICIOS

717. Dibujar tres triángulos distintos (equilátero, isósceles y escaleno) y determinar el circuncentro en cada uno de ellos.

718. Dibujar tres triángulos distintos (equilátero, isósceles y escaleno) y determinar el ortocentro en cada uno de ellos.

719. Dibujar tres triángulos distintos (equilátero, isósceles y escaleno) y determinar el baricentro en cada uno de ellos.

720. Dibujar tres triángulos distintos (equilátero, isósceles y escaleno) y determinar el incentro y los excentros.

721. Aprovechando las figuras del ejercicio anterior, trazar las circunferencias tangentes a las rectas que forman los triángulos.

722. Dígase en qué clase de triángulos el ortocentro: 1.º, es interior al triángulo; 2.º, está en el contorno; 3.º, está fuera del triángulo.

723. Construir un triángulo cualquiera y determinar el circuncentro, el ortocentro y el baricentro. ¿En qué posición se encuentran esos tres puntos?

724. Construir un triángulo equilátero y determinar el circuncentro, el ortocentro, el baricentro y el incentro. ¿Qué posición guardan entre sí esos cuatro puntos?

725. Demostrar que las tres alturas de un triángulo equilátero le dividen en seis triángulos rectángulos iguales.

726. Fíjese en un papel la posición de tres puntos no situados en línea recta y hállese luego la posición de otro punto que equidiste de los tres primeros.

727. Determínese sobre una recta un punto que equidiste de otros dos situados fuera de la recta.

728. ¿En dónde está situado el circuncentro de un triángulo rectángulo? Razónese y compruébese la contestación.

729. Demostrar que el segmento rectilíneo que une los puntos medios de dos lados de un triángulo, es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.

730. Demostrar que el segmento rectilíneo que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio, es paralelo a las bases e igual a la semisuma de sus longitudes.

731. Construir un triángulo, conocidos dos lados y la distancia de un vértice al circuncentro. Dígase cómo se resolverá el problema, en general, y hágase la aplicación al caso particular de ser $AB = 23$ mm., $BC = 34$ mm. y $AO = 18$ mm.

732. Construir un triángulo, dados un lado, un ángulo adyacente a él y la distancia de un vértice al circuncentro. Aplicación al caso de ser $AB = 26$ mm., áng. $ABC = 78°$ y $AO = 15$ mm.

733. Construir un triángulo, del que se conoce uno de los lados y las distancias de los extremos de ese lado al ortocentro. Aplicación al caso de ser $AB = 33$ mm., $AO = 11$ mm. y $BO = 25$ mm.

734. Construir un triángulo ABC, del que se conocen los lados AB y BC, y la mediana AD. Aplicación: $AB = 35$ mm., $BC = 27$ mm. y $AD = 28$ mm.

735. Las distancias del baricentro de un triángulo a los vértices del mismo son 20 cm., 16 cm. y 2'2 dm. Hallar la longitud de las medianas.

736. Construir un triángulo ABC, del que se conoce el lado BC y las medianas BN y CM que parten de los extremos de dicho lado. Aplicación: $BC = 27$ mm., $BN = 14$ mm. y $CM = 18$ mm.

737. Construir un triángulo, dada la posición de los puntos medios de los tres lados.

738. Construir un triángulo isósceles ABC, sabiendo que la base $BC = 2$ cm. y la distancia del baricentro G a la base es $GD = 10$ mm.

739. Construir un triángulo rectángulo ABC, del que se conoce la hipotenusa BC y una de las medianas que parten de sus extremos. Aplicación: $BC = 55$ milímetros, $BN = 42$ mm. (Sugerencia: ¿qué relación hay entre la hipotenusa y la mediana correspondiente a dicha hipotenusa?).

740. Construir un triángulo ABC, conociendo el lado BC, la altura AD y el ángulo A. Aplicación: $BC = 2$ cm., $AD = 18$ mm. y $A = 54°$. (Sugerencia: el vértice A se hallará en el arco capaz del ángulo A, construído sobre BC).

741. Construir un triángulo ABC, conociendo el lado BC, la mediana AD y el ángulo A. Aplicación: $BC = 2$ cm., $AD = 18$ mm. y $A = 54°$.

14. Relaciones métricas en los triángulos rectángulos

112. Proyecciones. — Dada una recta MN, se llama *proyección de un punto P* sobre dicha recta al punto P', pie de la perpendicular trazada desde el punto a la recta (fig. 30).

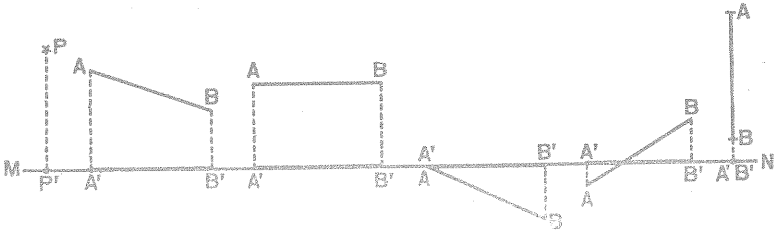


FIG. 30

Proyección de un segmento AB es el segmento $A'B'$ cuyos extremos son las proyecciones de los extremos A y B.

En la figura está representada la proyección de un segmento AB considerado en distintas posiciones respecto de la recta MN. Obsérvese:

1.° Si el segmento es oblicuo con relación a la recta, la proyección es menor que el segmento.

2.° Si el segmento es paralelo a la recta, la proyección es igual al segmento.

3.° Si el segmento es perpendicular a la recta, la proyección es un punto.

113. Teorema del cateto. — *En todo triángulo rectángulo, un cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella* (figura 31).

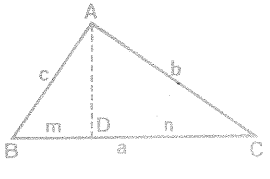


FIG. 31

Hipót.: $\triangle BAC$ rectángulo en A.

Tesis: $\frac{a}{c} = \frac{c}{m}$; $\frac{a}{b} = \frac{b}{n}$

Trazando la perpendicular AD, tendremos:

$\triangle BAC \sim \triangle ADB$, por tener el $\angle$ agudo B común [1];
$\triangle BAC \sim \triangle ADC$, por tener el $\angle$ agudo C común.

Luego, por la proporcionalidad de los lados homólogos, resulta:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \quad \text{o sea} \quad c^2 = a \cdot m \qquad [1]$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \quad \text{o sea} \quad b^2 = a \cdot n \qquad [2]$$

114. Teorema de la altura. — *En todo triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos que determina en la hipotenusa* (fig. 32).

Hipót.: $\triangle BAC$ rectángulo en A.

Tesis: $\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$

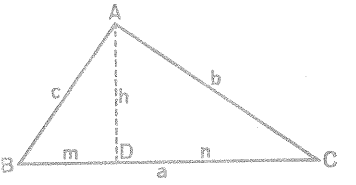


FIG. 32

En efecto: los triángulos rectángulos ABD y ADC son semejantes, por tener iguales los ángulos agudos; así, por ejemplo, los ángulos BAD y ACD son iguales, ya que ambos son complementarios del ángulo ABC.

De la semejanza de dichos triángulos, por la proporcionalidad de los lados homólogos, resulta:

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n} \quad \text{o sea} \quad h^2 = m \cdot n \qquad [3]$$

115. Construcción del segmento medio proporcional entre otros dos. — Los teoremas del cateto y de la altura permiten las siguientes construcciones del segmento medio proporcional entre otros dos segmentos dados.

(1) El signo $\sim$ quiere decir *semejante a*.

PRIMERA CONSTRUCCIÓN. — Sobre una semirrecta cualquiera tomemos, sucesivamente, $AC = a$ y $CB = b$ (fig. 33). Describamos una semicircunferencia con AB por diámetro, y en el punto C tracemos una perpendicular CD a AB. Este segmento es el medio proporcional buscado.

En efecto: DC es la altura correspondiente a la hipotenusa en el triángulo ADB, que es rectángulo en D.

De esta construcción, se deduce: *Toda perpendicular trazada al diámetro desde un punto de la circunferencia, es media proporcional entre los segmentos que determina en el diámetro.*

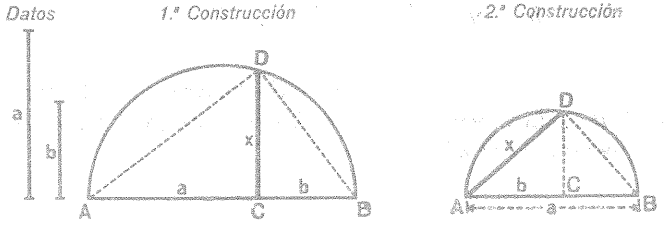


FIG. 33

SEGUNDA CONSTRUCCIÓN. — Sobre una semirrecta cualquiera tomemos $AB = a$ y $AC = b$. Con diámetro AB, construyamos una circunferencia, y tracemos la perpendicular CD al diámetro AB por el punto C. Unamos A con D, y el segmento AD será el medio proporcional pedido.

En efecto: AD es cateto del triángulo ADB, en el que AB es la hipotenusa y AC la proyección de AD sobre AB.

Esta segunda construcción nos permite enunciar lo siguiente: *Toda cuerda es media proporcional entre el diámetro que pasa por uno de sus extremos y su proyección sobre él.*

116. Teorema de Pitágoras. — *En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

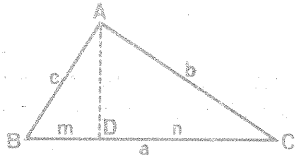


FIG. 34

Hipót.: $\triangle BAC$ rectángulo en A.

Tesis: $a^2 = b^2 + c^2$

En virtud del teorema del cateto, podemos escribir:

$$b^2 = a \cdot n$$
$$c^2 = a \cdot m$$

y sumando miembro a miembro estas igualdades, resulta

$$b^2 + c^2 = an + am = a(n+m) = a^2$$
$$\therefore\ a^2 = b^2 + c^2 \qquad [4]$$

117. Consecuencias. — 1.ª *El cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa, menos el cuadrado del otro cateto.*

En efecto: de la igualdad [4], se obtiene:

$$b^2 = a^2 - c^2 \qquad [5]$$
$$c^2 = a^2 - b^2 \qquad [6]$$

2.ª *La hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos.*

Extrayendo la raíz cuadrada en la fórmula [4], resulta:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} \qquad [7]$$

3.ª *Un cateto es igual a la raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del otro cateto.*

Extrayendo la raíz cuadrada en las fórmulas [5] y [6], se obtiene:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \qquad [8]$$
$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \qquad [9]$$

118. Construcción de una figura semejante a otras dos y que tenga por área su suma o su diferencia. — Teniendo en cuenta que el área de un cuadrado va expresada por el cuadrado de su lado, el teorema de Pitágoras puede enunciarse de este modo:

En un triángulo rectángulo, el cuadrado construído sobre la hipotenusa, como lado, es igual a la suma de los cuadrados construídos sobre los catetos.

Este teorema, enunciado así, no es sino un caso particular de otro que dice:

Si sobre los lados de un triángulo rectángulo, considerados como lados homólogos, se construyen tres polígonos semejantes, el área del polígono construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los polígonos construidos sobre los catetos.

En efecto: designemos por a la hipotenusa y por b y c a los catetos de un triángulo rectángulo. Sean P_a, P_b y P_c las áreas de los polígonos semejantes construídos sobre a, b y c, considerados como lados homólogos.

Recordando que la razón de las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza, tendremos:

$$\frac{P_b}{P_a} = \frac{b^2}{a^2} \qquad \frac{P_c}{P_a} = \frac{c^2}{a^2}$$

Sumando miembro a miembro estas igualdades, resulta

$$\frac{P_b + P_c}{P_a} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$

y como en esta proporción es $a^2 = b^2 + c^2$, necesariamente habrá de ser

$$P_a = P_b + P_c$$

según pretendíamos demostrar.

Basados en este teorema, podremos resolver problemas como los siguientes:

PROBLEMA 1.° — *Dados dos polígonos semejantes, construir otro semejante a ellos e igual a su suma.*

Sean P_b y P_c (fig. 35) los polígonos semejantes que se nos dan. Primeramente, construiremos un triángulo rectángulo CAB cuyos catetos b y c sean dos lados homólogos de los polígonos dados. Luego, sobre un segmento que sea igual a la hipotenusa a, considerado como lado homólogo de los elegidos para catetos, se construye un polígono P_a semejante a los dados, el cual será la solución del problema.

En la práctica, como se ve, el problema se reduce a construir un polígono homotético a uno de los dados, tomando como lado homólogo la hipotenusa del triángulo rectángulo.

PROBLEMA 2.° — *Dados dos polígonos semejantes, construir otro semejante a ellos e igual a su diferencia.*

Sean P_a y P_c (fig. 35) los polígonos dados. Construiremos un triángulo rectángulo CAB, tomando como hipotenusa un lado a del polígono mayor y siendo su homólogo en el otro c, uno de los catetos. Bastará luego construir el polígono P_b homotético del P_a, tomando como lado homólogo el otro cateto, b. Dicho polígono será el pedido, ya que, en efecto, si

$$P_a = P_b + P_c \quad \text{se deduce que} \quad P_b = P_a - P_c$$

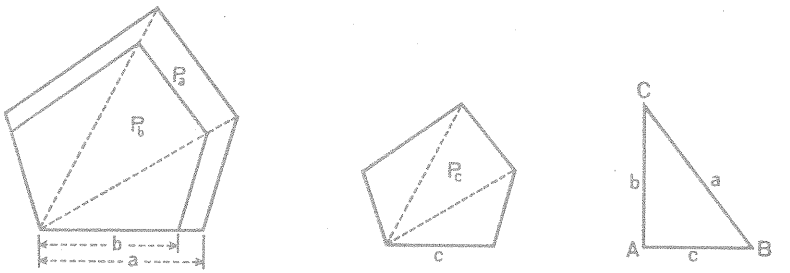


FIG. 35

119. Relación entre los cuadrados de los catetos y sus proyecciones sobre la hipotenusa.

En todo triángulo rectángulo, los cuadrados de los catetos son proporcionales a sus proyecciones sobre la hipotenusa.

En efecto: dividiendo miembro a miembro las igualdades [1] y [2] y simplificando, resulta:

$$\frac{c^2}{b^2} = \frac{a \cdot m}{a \cdot n} = \frac{m}{n}$$

EJERCICIOS

742. Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa en un triángulo rectángulo, miden 7'2 cm. y 12'8 cm. Se desea hallar la longitud de los catetos y la altura correspondiente a la hipotenusa.

743. En un triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos que miden 4 cm. y 9 cm. Calcular el perímetro del triángulo.

744. En un triángulo rectángulo, las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa valen 1'6 dm. y 3'6 dm. Averiguar el área del triángulo.

745. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 39 cm. y 52 cm. ¿Cuál será la longitud de cada una de las proyecciones de dichos catetos sobre la hipotenusa?

746. En un triángulo rectángulo, un cateto mide 15 cm. y la altura correspondiente a la hipotenusa, 12 cm. Calcular el otro cateto y la hipotenusa.

747. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 30 cm. y uno de los catetos, 18 cm. Averiguar el otro cateto y la altura correspondiente a la hipotenusa.

748. En un triángulo rectángulo ABC, la hipotenusa BC mide 15 cm. y la proyección de AC sobre BC es $DC = 5'4$. Se pide calcular los catetos y el área del triángulo.

749. La hipotenusa de un triángulo rectángulo e isósceles mide 4'2 cm. Calcular la longitud de uno de los catetos.

750. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 14 m. y 21 m. Calcular la altura relativa a la hipotenusa.

751. Un rombo tiene la diagonal menor igual al lado, que mide 10 cm. Se desea hallar el área del rombo.

752. ¿Qué altura alcanza una escalera de 9 m. de larga aplicada a una pared vertical, si su pie dista 2'50 m. de la pared?

753. Las diagonales de un rombo miden 8 dm. y 1 m. Hallar el perímetro y el área de dicho rombo.

754. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 cm. y 4 cm. Hallar los de otro semejante, sabiendo que su área es de 24 dm^2.

755. El perímetro de un rombo es de 25 cm. Calcular el área de dicho rombo, sabiendo que su diagonal menor es igual al lado.

756. En una circunferencia de radio igual a 32'5 cm., se traza una cuerda de 52 cm. ¿Cuál será la proyección de dicha cuerda sobre el diámetro que pasa por uno de sus extremos?

757. Calcular la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 3'6 cm.

758. Calcular la longitud de una cuerda, sabiendo que se halla a una distancia de 13'2 dm. del centro de la circunferencia y que el radio de ésta mide 143 cm.

759. Construir el segmento medio proporcional entre otros dos que miden 3 cm. y 2 cm. Empléense dos procedimientos.

760. En un trapecio rectángulo, las bases miden 5'1 cm. y 3 cm. y la altura 2'8 cm. Calcular el perímetro de dicho trapecio.

761. El perímetro de un triángulo isósceles ABC mide 16 cm., y la altura correspondiente a la base BC mide 4 cm. Calcular la longitud de los lados y el área del triángulo.

762. Calcular el área de un triángulo rectángulo cuya altura relativa a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos de 7 m. y 28 m.

763. Los catetos de un triángulo rectángulo miden $b = 6$ cm. y $c = 8$ cm. Se desea hallar: 1.º, la hipotenusa; 2.º, las proyecciones de b y c sobre la hipotenusa; 3.º, la altura correspondiente a la hipotenusa, y 4.º, el área del triángulo.

764. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 80 cm. y su base mide 30 centímetros. ¿Cuánto mide su área?

765. Desde un punto P de una semicircunferencia, se traza la perpendicular al diámetro, quedando éste dividido en dos segmentos que miden 6'4 cm. y 3'6 cm. Calcular el área de la parte de círculo comprendida entre la semicircunferencia y el triángulo que se forma uniendo el punto P con los extremos del diámetro.

766. Un trapecio isósceles tiene sus bases de 6 dm. y 2 m., siendo su altura igual a 24 dm. Calcular los lados de un trapecio semejante, cuyo perímetro es de 38 decímetros.

767. Calcular los lados de un rectángulo de 75 cm. de diagonal y semejante a otro de lados 36 cm. y 48 cm.

768. Las proyecciones de los catetos de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa miden 7'2 cm. y 12'8 cm. Calcular los catetos y el área del triángulo.

769. En un triángulo isósceles, la base mide 6 cm. y los lados iguales 5 cm. Calcular las alturas del triángulo.

770. Las diagonales de un rombo miden 42 cm. y 56 cm. Hallar el lado y la altura del rombo.

771. Un terreno de forma rectangular tiene 126 m. de perímetro. Calcular el valor del terreno, vendiéndolo a 200 ptas. el área, y sabiendo que es semejante a otro que tiene 12 m. de base y 9 m. de altura.

772. Calcular las distancias que hay de los vértices a las diagonales en un rectángulo cuyos lados miden 20'4 dm. y 153 cm.

773. Calcular los lados de un triángulo rectángulo cuyo perímetro es 30 cm. y uno de los catetos mide 5 cm.

774. Calcular el área de un triángulo equilátero cuyo perímetro es de 30 m.

775. Desde un punto M de una circunfenrencia se traza la perpendicular a un diámetro, la cual divide a éste en dos segmentos que miden 9'6 cm. y 5'4 cm. Calcular las longitudes de las cuerdas que unen el punto M con los extremos de dicho diámetro.

776. El perímetro de un trapecio isósceles es de 12 cm. Calcular la altura, sabiendo que la base mayor mide 5 cm. y es doble de la base menor.

777. Calcular el radio de una circunferencia en la que dos cuerdas perpendiculares, con un extremo común, miden 4'5 y 6 m.

778. Se tiene el trapecio $ABCD$, rectángulo en B y C. Sus bases miden: $AB = 3$ m., $CD = 6$ m. y la diagonal $AC = 10$ m. Calcular su área.

779. ¿Cuál es el área del cuadrado inscrito en una circunferencia, sabiendo que el perímetro del hexágono inscrito en la misma mide 15 metros?

780. Los lados de un rectángulo miden 2'1 cm. y 2'8 cm. Hallar la diagonal de un rectángulo semejante, sabiendo que su perímetro mide 98 cm.

781. Dadas dos circunferencias concéntricas de 2 cm. y 2'5 cm. de radio, se traza en la mayor una cuerda tangente a la menor. Calcular la longitud de esta cuerda.

782. Los radios de dos circunferencias tangentes exteriormente miden 2 cm y 1 cm. Se desea hallar la longitud de la parte de tangente común exterior comprendida entre los puntos de tangencia. (Sugerencia: trácese la paralela a la tangente por el centro de la circunferencia menor).

783. Dos circunferencias cuyos radios miden 11 cm. y 4 cm., tienen sus centros distantes 25 cm. Hallar la longitud de la parte de tangente común exterior comprendida entre los puntos de tangencia.

784. Se tiene una circunferencia de centro O y radio $r = 9$ cm. Desde un punto P situado a 24 cm. de distancia de O se trazan las tangentes a la circunferencia. Hallar la distancia AB de los puntos de tangencia y la AP entre uno de esos puntos y P.

785. La generatriz y la altura de un cono de revolución miden, respectivamente, 13 cm. y 5 cm. Calcular el volumen de este cono.

786. Construir: 1.º, dos hexágonos semejantes, tomando como lados homólogos dos segmentos de 24 mm. y 16 mm.; 2.º, un hexágono semejante a los anteriores e igual a su suma.

787. Construir: 1.º, dos pentágonos semejantes con dos lados homólogos iguales a 35 mm. y 21 mm.; 2.º, un pentágono semejante a los anteriores e igual a su diferencia.

788. En un triángulo rectángulo, la razón entre los dos catetos es igual a $\frac{1}{3}$. Se desea hallar: 1.º, la razón entre los segmentos determinados en la hipotenusa por la altura correspondiente; 2.º, la medida de dichos segmentos, sabiendo que la hipotenusa mide 25'30 cm.

15. Relaciones métricas en los triángulos oblicuángulos

120. Cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo. — *En todo triángulo, el cuadrado de un lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él* (figs. 36 y 37).

Hip.: Lado a opuesto al $\angle$ agudo A.

Tesis:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm.$$

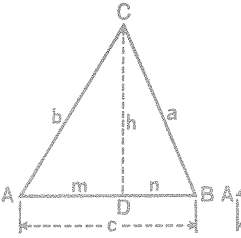


FIG. 36

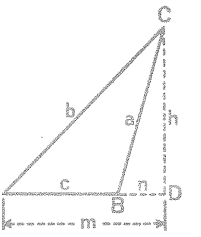


FIG. 37

Tracemos en ambas figuras la altura $CD=h$. En la primera, el pie D de dicha altura se encuentra en el lado AB, y en la segunda, D se halla en la prolongación de AB; pero en los dos casos, los triángulos rectángulos CDB nos permiten escribir las siguientes igualdades:

$$a^2 = h^2 + n^2$$
$$a^2 = h^2 + (c-m)^2 \quad \text{por ser} \quad n = c - m \quad \text{(fig. 36)}$$
$$a^2 = h^2 + (m-c)^2 \quad \text{por ser} \quad n = m - c \quad \text{(fig. 37)}$$
$$\therefore\ a^2 = h^2 + m^2 + c^2 - 2cm$$

Por otra parte, el $\triangle$ rectángulo ADC da en ambas figuras

$$b^2 = h^2 + m^2$$

Luego, sustituyendo en la penúltima igualdad $h^2 + m^2$ por su igual b^2, resulta

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$$

como se quería demostrar.

121. Cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso. — *En todo triángulo, el cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, más el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él* (fig. 38).

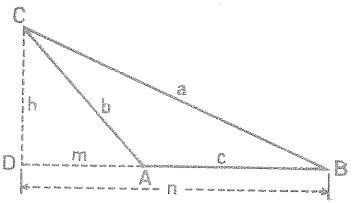


FIG. 38

Hipót.: a opuesto al $\angle$ obtuso A.

Tesis: $a^2 = b^2 + c^2 + 2\,cm$.

Tracemos la altura $CD = h$. El triángulo rectángulo CDB nos permite escribir las siguientes igualdades:

$$a^2 = h^2 + n^2$$
$$a^2 = h^2 + (m+c)^2 \quad \text{por ser} \quad n = m + c$$
$$\therefore\ a^2 = h^2 + m^2 + c^2 + 2\,cm$$

Como, además, por el $\triangle$ rectángulo CDA se ve que

$$b^2 = h^2 + m^2$$

sustituyendo en la penúltima igualdad, resulta

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,cm$$

según se quería demostrar.

122. Forma de un triángulo. — En virtud de los dos teoremas anteriores y del de Pitágoras, podemos enunciar:

En todo triángulo, el cuadrado del lado opuesto a un ángulo será, respectivamente, menor, igual o mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados, según que dicho ángulo sea agudo, recto u obtuso.

Y, recíprocamente:

En un triángulo, un ángulo será agudo, recto u obtuso, según que el cuadrado del lado opuesto sea, respectivamente, menor, igual o mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

Como, por otra parte, sabemos que un triángulo tiene por lo menos dos ángulos agudos, y que a mayor ángulo corresponde mayor lado, es fácil reconocer si un triángulo es acutángulo, rectángulo u obtusángulo, cuando se conocen las medidas de sus lados. Bastará elevar al cuadrado el lado mayor y ver si ese cuadrado es menor, igual o mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos.

Así, el triángulo cuyos lados miden 3 cm., 5 cm. y 6 cm., es obtusángulo, porque se tiene:

$$6^2 > 3^2 + 5^2$$

APLICACIÓN AL CÁLCULO DE MEDIANAS Y ALTURAS

123. Cálculo de las medianas. — Sea el triángulo ABC (figura 39). Queremos hallar la mediana m_a, correspondiente al lado a, en función de este lado y los otros dos b y c.

Trazando la altura h, obtenemos la proyección de m_a sobre a, que es MD. Aplicando ahora los teoremas anteriores (120 y 121) a los triángulos AMC y AMB, se tiene:

$$b^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot MD$$

(Obsérvese que BM = MC = $a/2$)

$$c^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot MD$$

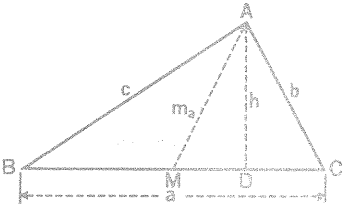


FIG. 39

Sumando miembro a miembro estas igualdades, resulta

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{2a^2}{4} = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

y aislando m_a^2

$$m_a^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

de donde,

$$m_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$$

Aplicando a los otros dos lados el mismo razonamiento, se obtiene:

$$m_b = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2} \qquad m_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$$

fórmulas de las cuales es fácil acordarse por su estructura particular.

124. Cálculo de las alturas. — Supongamos los triángulos *ABC* (figuras 40 y 41), y tratemos de calcular la altura h_a, correspondiente al lado *a*, en función de los lados *a*, *b* y *c*.

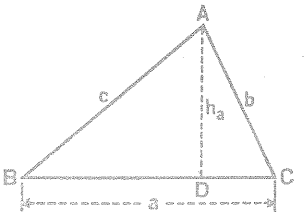


FIG. 40

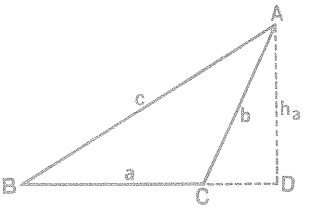


FIG. 41

En el triángulo rectángulo *ABD*, se tiene:

$$h_a^2 = c^2 - \overline{BD}^2 \qquad [1]$$

En el triángulo *ABC*, por oponerse *b* a un ángulo agudo, es

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot BD$$

de donde,

$$BD = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

y sustituyendo este valor de BD en la igualdad [1], resulta:

$$h_a^2 = c^2 - \frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2c^2 - (a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{(2ac)^2 - (a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}$$

Observando que el numerador es una diferencia de cuadrados, podremos escribir:

$$h_a^2 = \frac{(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)}{4a^2} =$$

$$= \frac{[(a^2+2ac+c^2) - b^2][b^2 - (a^2-2ac+c^2)]}{4a^2} =$$

$$= \frac{[(a+c)^2 - b^2][b^2 - (a-c)^2]}{4a^2} =$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}{4a^2} \qquad [2]$$

Designando por p al semiperímetro del triángulo, será

$$a + b + c = 2p$$

y restando a los dos miembros de esta igualdad $2a$, $2b$ y $2c$, resulta, respectivamente:

$$b + c - a = 2p - 2a = 2(p-a)$$
$$a + c - b = 2p - 2b = 2(p-b)$$
$$a + b - c = 2p - 2c = 2(p-c)$$

Sustituyendo estos valores en [2], se obtiene

$$h_a^2 = \frac{2p \times 2(p-b) \times 2(p-c) \times 2(p-a)}{4a^2} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}$$

y extrayendo la raíz cuadrada de los dos miembros,

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Por un razonamiento análogo obtendríamos las alturas correspondientes a los lados b y c, cuyas fórmulas son:

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

125. Área del triángulo, en función de los lados. — Considerando el mismo triángulo de las figuras 40 y 41, tendremos:

$$\text{Área} = \tfrac{1}{2}\, a \cdot h_a = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

que es la llamada *fórmula de Herón* [1].

EJEMPLO. — Hallar el área de un triángulo cuyos lados miden 26 m., 25 m. y 17 m.

Procederemos como sigue:

$$2p = 26 + 25 + 17 = 68; \qquad p = 34$$

$$p - a = 34 - 26 = 8; \quad p - b = 34 - 25 = 9; \quad p - c = 34 - 17 = 17$$

$$p(p-a)(p-b)(p-c) = 34 \times 8 \times 9 \times 17 = 41.616$$

$$\text{Área} = \sqrt{41.616} = 204 \text{ m}^2.$$

EJERCICIOS

789. Los lados de un triángulo ABC miden $a = 12$ cm., $b = 8$ cm. y $c = 10$. Calcular la proyección de b sobre a.

790. La medida de los lados de un triángulo es de 20, 25 y 30 centímetros. Averiguar los segmentos determinados en cada lado por la altura respectiva.

791. Supongamos un triángulo ABC, del que se conocen dos lados, $a = 21$ cm. y $c = 26$ cm. Sabiendo que la proyección de a sobre c está en la prolongación de c y es igual a 9 cm., se desea hallar el lado b.

(*) HERÓN *de Alejandría*. Matemático griego de fines del siglo II antes de J. C.

792. Los lados de un triángulo ABC miden, respectivamente, $a = 56$ cm., $b = 75$ cm. y $c = 61$ cm. Se desea saber: 1.º, la clase de ángulo que se opone a cada uno de dichos lados; 2.º, la medida de la proyección del lado c sobre el b.

793. Averiguar si es acutángulo, rectángulo u obtusángulo el triángulo cuyos lados miden:

1.º $a = 11$ cm.; $b = 9$ cm.; $c = 8$ cm.
2.º $a = 20$ cm.; $b = 16$ cm.; $c = 12$ cm.
3.º $a = 75$ cm.; $b = 56$ cm.; $c = 61$ cm.

794. Se tiene un triángulo ABC. El lado AB mide 48 mm., el AC, 6 cm., y la altura AH divide al tercer lado en dos segmentos BH y CH cuyas longitudes están en la relación de 1 a 3. Calcular la medida del lado BC y la de la altura AH.

795. En un triángulo ABC es $AB = 41$ cm., $AC = 67$ cm., y el pie H de la altura AH dista 15 cm. de B. Calcular la longitud del tercer lado en las dos posiciones que puede tener H, cuyo punto puede pertenecer al tercer lado o ser exterior.

796. Calcular las medianas de cada uno de los triángulos del ejercicio 793.

797. Calcular las alturas de cada uno de los triángulos del ejercicio 793.

798. Calcular el área de cada uno de los triángulos del ejercicio 793.

799. Calcular las medianas de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 cm. y 8 cm.

800. Demostrar que la suma de los cuadrados de las tres medianas de un triángulo, es igual a los $\frac{3}{4}$ de la suma de los cuadrados de los tres lados.

16. Bisectrices de un triángulo

126. Teorema de la bisectriz interior. — *La bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en partes proporcionales a los otros dos lados* (fig. 42).

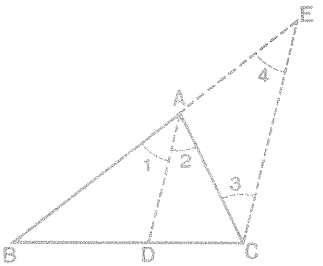


FIG. 42

Hipót.: AD bisectriz del $\angle A$.

Tesis: $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$

En efecto: Tracemos por C la paralela a la bisectriz AD, y sea E el punto de intersección de dicha paralela con la prolongación del lado AB.

En virtud del teorema de Tales, podemos escribir:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE} \qquad [1]$$

Ahora bien: por ser AD bisectriz del ángulo BAC y además paralela a CE, se verifica:

áng. 3 = áng. 2, por alternos internos
áng. 4 = áng. 1, por correspondientes
áng. 3 = áng. 4, por ser áng. 1 = áng. 2

Luego, el $\triangle AEC$ es isósceles y, por tanto, $AE = AC$.

Sustituyendo ahora AE por su igual AC en la proporción [1], antes establecida, resulta

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

como queríamos demostrar.

EJEMPLO. — En un triángulo ABC cuyos lados miden $a = 30$ cm., $b = 17'5$ cm., $c = 26'5$ cm., se desea calcular los segmentos BD y DC en que la bisectriz interior AD divide al lado a.

Llamando x a la distancia BD, será $DC = 30 - x$, y tendremos:

$$\frac{x}{30 - x} = \frac{26'5}{17'5}; \text{ de donde } x = BD = 18'07 \text{ cm.}; \quad DC = 11'93 \text{ cm.}$$

127. Teorema de la bisectriz exterior. — *La bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo corta a la prolongación del lado opuesto en un punto tal, que sus distancias a los extremos de ese lado son proporcionales a los otros dos lados* (fig. 43).

Hipót.: AD bisectriz del $\angle$ ext. A.

Tesis: $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$

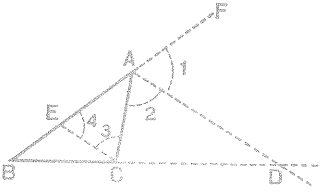


FIG. 43

Tracemos CE paralela a AD y, en virtud del teorema de Tales, podremos escribir:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} \qquad [2]$$

Como en el teorema anterior, se verifica:

áng. 3 = áng. 2, por alternos internos
áng. 4 = áng. 1, por correspondientes
áng. 3 = áng. 4, por ser áng. 1 = áng. 2

Luego, el $\triangle$ AEC es isósceles y, por tanto, $AE = AC$.

Sustituyendo en [2] AE por su igual AC, resulta

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

como se quería demostrar.

128. Cuaterna armónica. Propiedades. — Consideremos un triángulo ABC (fig. 44). De acuerdo con los dos teoremas anteriores, si trazamos la bisectriz CM de uno de sus ángulos y la CN, correspondiente al ángulo exterior adyacente, tendremos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{MA}{MB} &= \frac{CA}{CB} \\ \frac{NA}{NB} &= \frac{CA}{CB} \end{aligned}\right\} \text{ de donde } \quad \frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} \qquad [3]$$

Los puntos M y N cuyas distancias a otros dos A y B forman la proporción [3], se dice que son *conjugados armónicos* con respecto a los puntos A y B.

Es decir: *Dados dos puntos* A *y* B *sobre una recta, un punto* M *interior al segmento* AB *y otro exterior* N, *se dice que el* M *y* N *son conjugados armónicos con respecto a* A *y* B, *si la razón de las distancias de* M *a* A *y* B *es igual a la razón de las distancias de* N *a* A *y* B.

El grupo de puntos A, B, M, N, recibe el nombre de *grupo armónico* o *cuaterna armónica*. La razón de esta denominación es porque, si se pulsan cuatro cuerdas de longitudes correspondientes a los segmentos de la proporción [3], dan un *acorde perfecto*, como: *do, mi, sol, do*.

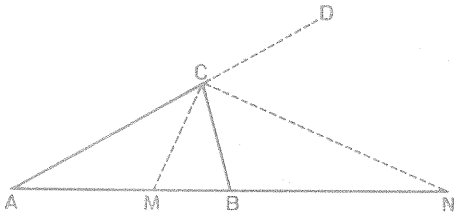


FIG. 44

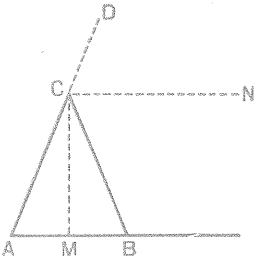


FIG. 45

PROPIEDADES:

1.ª Los puntos conjugados armónicos tiene la propiedad recíproca, **es decir que, si los puntos M y N son conjugados armónicos respecto de A y B, éstos lo serán con respecto a M y N.**

En efecto: al permutar los medios en la proporción [3], resulta

$$\frac{MA}{NA} = \frac{MB}{NB} \quad \text{o lo que es igual} \quad \frac{AM}{AN} = \frac{BM}{BN}$$

indicándonos la última proporción que A y B son los conjugados armónicos de M y N.

2.ª El conjugado armónico del punto medio M de un segmento AB, no existe o, de otro modo, dicho punto se encuentra en el infinito.

En efecto: Supongamos un triángulo isósceles ABC (fig. 45), y sea CM la bisectriz del ángulo formado por los lados iguales. Dicha recta pasa por el punto medio de AB y es además perpendicular al lado AB.

Por otra parte, la bisectriz CN del ángulo exterior será perpendicular a CM, ya que los dos ángulos en C son adyacentes. Luego, AB y CN, que son perpendiculares a CM, serán paralelas entre sí, es decir, no se cortarán o, como suele decirse, se cortarán en el infinito.

3.ª Los conjugados armónicos de los puntos situados a la derecha del punto medio de un segmento AB, se encuentran a la derecha del punto B.

Supongamos un punto M situado a la derecha del punto medio P del segmento AB (fig. 46). La razón $MA : MB$ es mayor que 1; luego, el conjugado armónico N tiene que estar a la derecha de B para que la razón $NA : NB$ sea también mayor que 1, ya que si N estuviera a la izquierda de A, sería $NA : NB < 1$, no pudiendo, por tanto, esta razón ser igual a la primera, $MA : MB$.

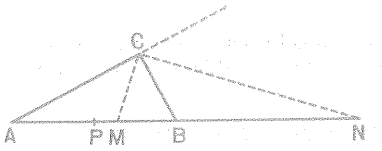


FIG. 46

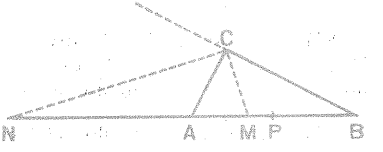


FIG. 47

4.ª Los conjugados armónicos de los puntos situados a la izquierda del punto medio de un segmento AB, se encuentran a la izquierda del punto A (figura 47).

El razonamiento es análogo al empleado en el caso anterior.

CONSTRUCCIÓN GRÁFICA. — Dados dos puntos A y B (fig. 48) y un tercero M, situado en la recta que aquellos determinan, para hallar el conjugado armónico de M, respecto de A y B, trazaremos por A y B dos paralelas cualesquiera, AC y BD'. Cortándolas con una secante que pase por M, obtendremos los puntos C y D. Tomemos luego $BD' = BD$; la recta CD' determinará sobre AB el punto pedido N. En efecto: por la semejanza de los triángulos AMC y BMD, se tiene

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AC}{BD}$$

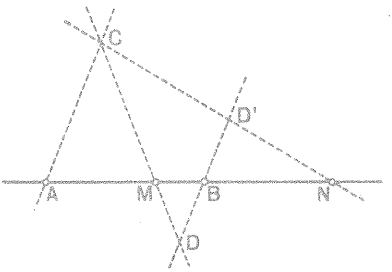


FIG. 48

y por la semejanza de los triángulos NCA y $ND'B$,

$$\frac{NA}{NB} = \frac{AC}{BD'}$$

De estas dos proporciones se deduce la siguiente

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$$

la cual indica que M y N son conjugados armónicos respecto de A y B

EJERCICIOS

801. Las longitudes de los lados de un triángulo son 4 cm., 6 cm. y 7 cm. Calcular las longitudes de los segmentos que sobre el último lado determina la bisectriz interior del ángulo opuesto.

802. Dado un triángulo ABC cuyos lados miden $AB = 6$ dm., $BC = 5$ dm. y $CA = 4$ dm., averiguar los segmentos que sobre el lado BC determina la bisectriz interior del ángulo opuesto. Id. los de la bisectriz exterior.

803. Los tres lados de un triángulo miden 8, 7 y 12 m. Calcular los dos segmentos en que queda dividido el mayor de los lados por la bisectriz del ángulo opuesto.

804. En un triángulo rectángulo, un cateto mide 5 cm. y la hipotenusa 13 centímetros. Calcular los segmentos en que la bisectriz del ángulo que forman divide al otro cateto.

805. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 6'5 cm. y 13'2 cm. Calcular los segmentos en que la bisectriz del ángulo recto divide a la hipotenusa.

806. En un triángulo cuyos lados miden 12 dm., 15 dm. y 18 dm., se desea hallar la distancia entre los pies de las bisectrices interior y exterior correspondientes al mayor de los ángulos.

807. En un triángulo ABC, $BC = 7$ cm. y $CA = 5$ cm. Sabiendo que la bisectriz del ángulo interior C corta al lado opuesto a una distancia del vértice B igual a 2'8 cm., se desea averiguar la longitud del lado AB.

808. Sobre una recta XX' tenemos tres puntos A, M y B, colocados en este orden, y sabemos que $AB = 50$ mm. y $MB = 15$ mm. Construir el conjugado de M con respecto a A y B.

809. Un segmento AB tiene 40 mm. de longitud. Hallar gráficamente los conjugados armónicos M y N respecto de A y B, sabiendo que la razón es $\frac{2}{3}$.

810. Tenemos un círculo de radio $r = 23$ mm. y un punto P interior al círculo. Se desea hallar gráficamente el conjugado armónico de dicho punto, respecto de los extremos A y B del diámetro que pasa por él.

17. Potencia de un punto respecto de una circunferencia

129. Potencia de un punto respecto de una circunferencia. — TEOREMA: *Si por un punto se trazan secantes a una circunferencia, el producto de las distancias del punto a las intersecciones de cada secante con la circunferencia es constante.*

El teorema es válido tanto si el punto P es exterior (fig. 49) como si es interior (fig. 50).

Hipót.: 1.° P punto exterior; PAB y PCD secantes.
2.° P punto interior; APB y CPD secantes.

Tesis: $PA \times PB = PC \times PD$.

1.° *El punto* P *es exterior a la circunferencia* (fig. 49).

Al trazar las rectas AD y BC, se forman

$$\triangle PAD \sim \triangle PCB$$

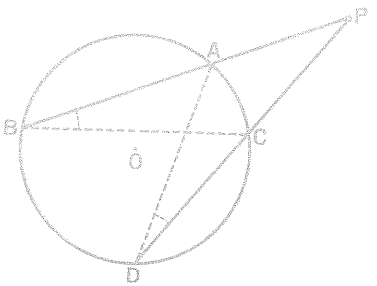


FIG. 49

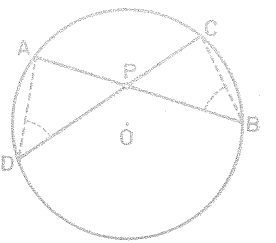


FIG. 50

por tener el ángulo P común, y ser iguales los ángulos D y B, como inscritos que comprenden el mismo arco entre sus lados. Luego,

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \quad \text{de donde} \quad PA \times PB = PC \times PD$$

2.° *El punto* P *es interior a la circunferencia* (fig. 50).

Al trazar las rectas AD y CB, tendremos:

$$\triangle PAD \sim \triangle PCB$$

ya que los ángulos en P son iguales por opuestos por el vértice, y los D y B por estar inscritos en el mismo arco. Luego,

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \quad \text{de donde} \quad PA \times PB = PC \times PD$$

DEFINICIÓN DE POTENCIA DE UN PUNTO. — En el teorema anterior hemos supuesto solamente dos secantes de entre las infinitas que pasan por P, pero el resultado será el mismo cualesquiera que sea la secante que se considere.

Dados una circunferencia y un punto, se llama potencia del punto con respecto a la circunferencia, al valor constante de los productos de los dos segmentos que determina la circunferencia sobre cualquier secante que pase por el punto, contados a partir del punto dado.

Como es igual al producto de dos segmentos, la potencia de un punto respecto de una circunferencia se expresará en unidades de superficie. Para representar la potencia del punto P, pondremos:

$$\text{Pot. } (P) = PA \times PB$$

EJEMPLO. — En la figura 51, si el segmento PA mide 0'9 cm. y el PB vale 4'1 centímetros, la potencia del punto P respecto de la circunferencia O, será:

$$\text{Pot. } (P) = 0'9 \times 4'1 = 3'69 \text{ cm}^2$$

El punto P puede estar en la circunferencia, en cuyo caso uno de los factores de su potencia es nulo, por lo que el producto será igual a cero.

Expresamos esto, diciendo que *la potencia de cualquier punto de la circunferencia, respecto de la misma, es cero.*

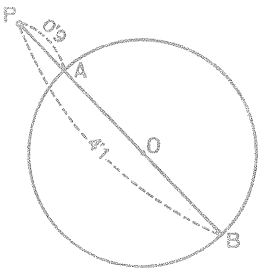


FIG. 51

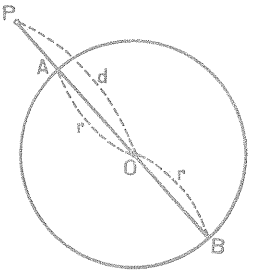


FIG. 52

130. Diversas expresiones de la potencia. — Vamos a expresar la potencia de un punto, en función de su distancia al centro de la circunferencia y del radio de ésta.

1) Si el punto P es exterior (fig. 52), tendremos:

$$\text{Pot. } (P) = PA \times PB = (d-r)(d+r) = d^2 - r^2$$

2) Cuando el punto P sea interior (fig. 53), será

$$\text{Pot. } (P) = PA \times PB = (r-d)(r+d) = r^2 - d^2$$

Pero si admitimos que la potencia de un punto interior es *negativa*, por tener sentido contrario los dos segmentos que se multiplican, la potencia es

$$\text{Pot. } (P) = -(PA \times PB) = -[(r-d)(r+d)] = -(r^2-d^2) = d^2 - r^2$$

3) Si el punto P está en la circunferencia, la potencia será

$$\text{Pot. } (P) = d^2 - r^2 = r^2 - r^2 = 0$$

En los tres casos, la expresión de la potencia es la misma:

$$\boxed{\text{Pot. } (P) = d^2 - r^2}$$

Es decir:

La potencia de un punto respecto de una circunferencia es igual a la diferencia entre el cuadrado de su distancia al centro de la circunferencia y el cuadrado del radio.

Si el punto P es exterior, trazando la tangente PT (fig. 54) encontramos una nueva expresión de la potencia.

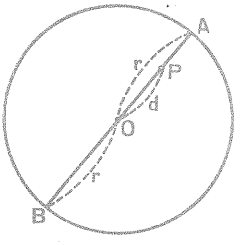


FIG. 53

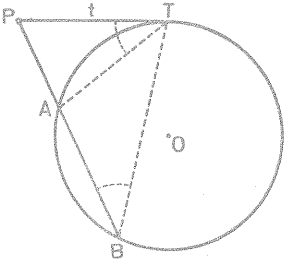


FIG. 54

En efecto: Consideremos, además de la tangente PT una secante cualquiera PB, y unamos el punto de tangencia T con las intersecciones A y B. Se han formado así los triángulos APT y PTB, de cuya semejanza (áng. P común y áng. PTA = áng. B), obtenemos

$$\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB} \quad \text{o sea,} \quad \overline{PT}^2 = PA \times PB$$

Como el producto $PA \times PB$ es la potencia del punto P, podremos escribir:

$$\text{Pot. } (P) = \overline{PT}^2 = t^2$$

Luego:

La potencia de un punto exterior a una circunferencia es igual al cuadrado del segmento de la tangente a la circunferencia, comprendido entre dicho punto y el de contacto.

Al segmento t se le conoce por *longitud de la tangente.*

131. Eje radical de dos circunferencias secantes o tangentes.

El lugar geométrico de los puntos que tienen igual potencia respecto de dos circunferencias dadas es una recta perpendicular a la línea de los centros.

A esta recta se le llama EJE RADICAL de las dos circunferencias.

La demostración del teorema anterior excede de los límites de este curso, pero si lo admitimos como cierto, la construcción del eje radical resulta sencilla en algunos casos, como en los dos siguientes:

1.° *Si las circunferencias son secantes* (fig. 55), *su eje radical es la secante común,* ya que los dos puntos de intersección tienen potencia nula respecto de las dos circunferencias.

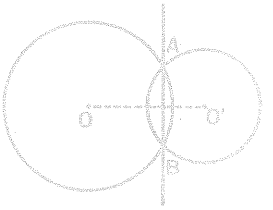


FIG. 55

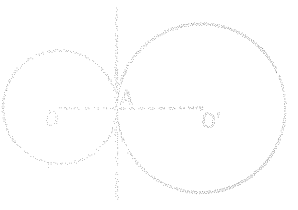


FIG. 56

2.° *Si las circunferencias son tangentes* (fig. 56), la perpendicular a la línea de los centros, trazada por el punto de contacto, es decir, *la tangente común a las dos circunferencias, es el eje radical.* En efecto: cualquier punto de dicha tangente tiene por potencia, respecto de las dos circunferencias, el cuadrado de la distancia entre ese punto y el de contacto.

EJERCICIOS

811. Dos cuerdas de circunferencia, AB y CD, se cortan en un punto P. Sabiendo que $PA = 2$ cm., $PB = 3$ cm. y $PD = 4$ cm., se desea calcular la medida de PC.

812. Sobre uno de los lados de un ángulo, de vértice O, se han tomado las distancias $OA = 3$ cm. y $OB = 27$ cm.; y sobre el otro, $OC = 6$ cm. y $OD = 13'5$ centímetros. Decir si pertenecen a una circunferencia los puntos A, B, C y D.

813. Calcular el diámetro de una circunferencia, sabiendo que una de sus cuerdas mide 3'5 cm. y la flecha o sagita de ésta, 7 mm.

814. Una cuerda de 24 cm. tiene una sagita de 8 cm. Calcular el radio de la circunferencia a la cual pertenece la cuerda.

815. Desde un punto *P*, situado a 74 mm. del centro de una circunferencia de 29 milímetros de radio, se traza una secante *PAB*. Sabiendo que la parte exterior a la circunferencia es $PA = 47$ mm., se desea averiguar cuánto mide toda la secante *PB*.

816. La tangente desde un punto *P* a una circunferencia mide 21 cm., y el punto de la circunferencia más distante de *P* se halla a 42'5 cm. ¿A qué distancia estará el punto más próximo?

817. Desde un punto *P* exterior a una circunferencia se traza una secante *PAB*, siendo $PA = 0'2$ m. y $PB = 0'7$ m. Sabiendo que la intersección más alejada de otra secante *PCD* se halla a la distancia 0'8 m. de *P*, se desea calcular la longitud de la cuerda determinada por esta segunda secante.

818. La tangente trazada desde un punto *P* exterior a una circunferencia mide 25 centímetros, y la distancia mínima del punto a la circunferencia, 13'5 cm. ¿Cuánto mide el radio?

819. La tangente desde un punto *P* a una circunferencia mide 41 cm., y la distancia máxima del punto a la circunferencia es de 79'5 centímetros. Averiguar la distancia de *P* al centro de dicha circunferencia.

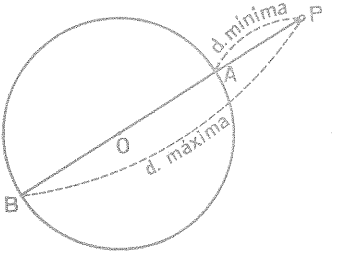


FIG. 56 bis

820. Desde un punto *P* exterior a una circunferencia se traza una secante cuyas intersecciones distan de *P* 3 cm. y 8 cm. Desde el mismo punto se traza luego otra secante que intercepta una cuerda *AB*. Se desea saber la longitud de dicha cuerda, sabiendo que la distancia *PA* es igual a 3'5 cm.

821. ¿A qué distancia se halla el horizonte divisado desde un avión que vuela sobre el océano a 2.600 m. de altura, supuesto el diámetro terrestre de 12.740 Km.?

822. Un punto *P* dista 39 dm. del centro de una circunferencia cuyo radio mide 15 decímetros, y otro *P'* dista 13 dm. Calcular las potencias de esos dos puntos.

823. Tenemos una circunferencia de 32 cm. de radio y un punto *P* situado a 18 cm. del centro. Una cuerda que pasa por *P* queda dividida por dicho punto en dos segmentos, de los cuales uno mide 40 cm. ¿Cuánto medirá el otro?

824. La potencia de un punto *P* es 32 cm^2, y la de otro *P'*, 28 cm^2, ambas respecto de la misma circunferencia. ¿Cuál de los dos puntos se halla más próximo al centro de la circunferencia? Razónese la contestación.

825. Construir el lugar geométrico de los puntos cuya potencia, respecto de una circunferencia de 1'5 cm. de radio, es 1'75 cm^2.

826. Tenemos dos circunferencias secantes que se cortan en los puntos *A* y *B*. Desde un punto *P*, situado en la prolongación de la cuerda común *AB*, trazamos las tangentes a las dos circunferencias. ¿Cómo son entre sí esas tangentes? Razonar la respuesta.

18. Construcciones geométricas

132. Construir dos segmentos, conociendo su suma y su producto. — Sea s la suma de los segmentos x e y. El producto siempre podemos expresarlo por m^2, en donde m representa la media geométrica entre x e y (*). Para obtener la medida de m, basta calcular la raíz cuadrada del número que expresa la medida del producto conocido.

Por tanto, será

$$x + y = s$$
$$xy = m^2$$

Para hallar estos segmentos, procederemos como sigue (fig. 57): Se traza a AB una perpendicular de longitud igual a m, y por su extremo se traza una paralela al diámetro. La perpendicular a AB desde uno cualquiera de los puntos M y M', divide a AB en dos segmentos AC y CB que resuelven el problema. En efecto:

$$AC + CB = AB = s; \qquad AC \times CB = \overline{MC}^2 = m^2$$

Para que haya solución, es necesario que la paralela MM' tenga algún punto común con la semicircunferencia, lo cual sucederá si $m \leqq \frac{1}{2}s$.

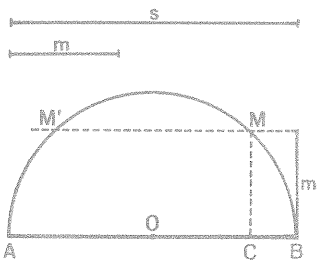


FIG. 57

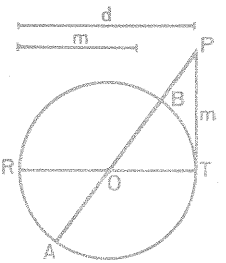


FIG. 58

(*) De ahí que este problema se enuncie también así: *Construir dos segmentos, conociendo su suma y su media proporcional.*

133. Construir dos segmentos, conociendo su diferencia y su producto. — Sea d la diferencia de los segmentos x e y. El producto podrá ir expresado por m^2, en donde m representa la media geométrica o proporcional entre x e y (*). La medida de m se halla extrayendo la raíz cuadrada del número que expresa la medida del producto conocido.

Por tanto, será

$$x - y = d$$
$$x\,y = m^2$$

Para obtener estos segmentos, procederemos así (fig. 58): Se traza una circunferencia con diámetro $RT = d$. En un punto cualquiera T de la misma, se traza la tangente y, en ella, a partir del punto de contacto, se toma el segmento $TP = m$. Uniendo P con el centro de la circunferencia por medio de una recta, quedarán determinados en ésta los segmentos PA y PB que resuelven el problema. En efecto:

$$PA - PB = AB = d; \qquad PA \times PB = \overline{PT}^2 = m^2$$

134. Cuadratura de polígonos. — *Cuadrar un polígono es obtener un cuadrado equivalente, es decir, que tenga la misma área.*

Teniendo en cuenta que el área del triángulo, del paralelogramo, del trapecio, del rombo y del polígono regular, es igual al producto de dos segmentos, obtendremos el cuadrado equivalente a dichos polígonos, construyendo un cuadrado que tenga por lado el medio proporcional de los referidos segmentos. Así lo indicamos en el siguiente cuadro:

ÁREA DEL		LADO DEL CUADRADO EQUIVALENTE
Triángulo	$A = \frac{1}{2} b \times h$	l = media proporcional entre $\frac{1}{2} b$ y h
Paralelogramo	$A = b \times h$	l = media proporcional entre b y h
Trapecio	$A = \frac{1}{2}(b+b') \times h$	l = media proporcional entre $\frac{1}{2}(b+b')$ y h
Rombo	$A = \frac{1}{2} d \times d'$	l = media proporcional entre $\frac{1}{2} d$ y d'
Polígono regular	$A = \frac{1}{2} p \times a$	l = media proporcional entre $\frac{1}{2} p$ y a

Resolvamos algunos de estos casos:

PROBLEMA 1.° — *Dado un triángulo, construir el cuadrado equivalente.*

(*) De ahí que este problema se enuncie también así: *Construir dos segmentos, conociendo su diferencia y su media proporcional.*

Designando por b y h, respectivamente, la base y altura del triángulo, y por l el lado del cuadrado, tendremos:

$$\text{área del triángulo} = \tfrac{1}{2} b \times h; \qquad \text{área del cuadrado} = l^2$$

Como han de ser equivalentes, se verificará:

$$l^2 = \tfrac{1}{2} b \times h \quad \text{o sea} \quad \frac{\frac{1}{2}b}{l} = \frac{l}{h}$$

lo que nos dice que el lado del cuadrado es medio proporcional entre la mitad de la base del triángulo y la altura (fig. 59):

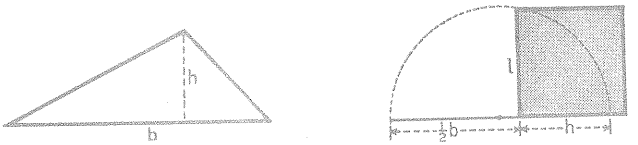


FIG. 59

PROBLEMA 2.° — *Dado un rectángulo, construir el cuadrado equivalente.*

Hallaremos el segmento medio proporcional entre la base y la altura del rectángulo, y el cuadrado construído sobre dicho segmento será el pedido (fig. 60).

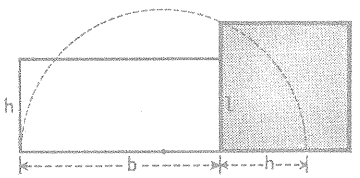


FIG. 60

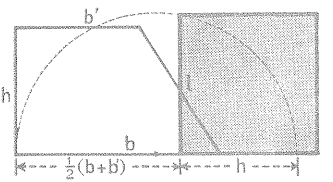


FIG. 61

PROBLEMA 3.° — *Dado un trapecio, construir el cuadrado equivalente.*

Bastará hallar el segmento medio proporcional entre la semisuma de las bases y la altura del trapecio; el cuadrado construído sobre dicho segmento será la solución del problema (fig. 61).

135. Conversión de un polígono en un triángulo equivalente.

PROBLEMA 1.º — *Convertir un polígono en otro equivalente que tenga un lado menos.*

Sea el cuadrilátero *ABCD* (fig. 62). Tracemos la diagonal *AC*, que forma con los lados *AD* y *DC* un triángulo. Por el vértice opuesto a *AC*, construyamos una paralela *DE* a esa recta, la cual corta en *E* a la prolongación del lado *BC*. Uniendo ahora por una recta los puntos *A* y *E*, tendremos el triángulo *ABE*, que es equivalente al cuadrilátero dado.

En efecto: los triángulos *ADC* y *AEC* son equivalentes, por tener la misma base e igual altura; luego, si a cada uno de ellos se añade la figura *ABC*, resultarán dos polígonos equivalentes: el *ABCD* y el *ABE*.

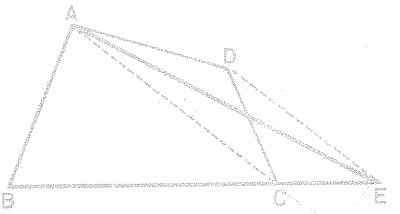


FIG. 62

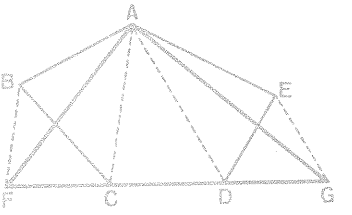


FIG. 63

PROBLEMA 2.º — *Convertir un polígono en un triángulo equivalente.*

Bastará reducir el polígono dado a otro equivalente que tenga un lado menos; éste, a su vez, a otro con un lado menos, y así sucesivamente hasta llegar al triángulo, que será equivalente al polígono propuesto (fig. 63).

136. Cuadrar un polígono cualquiera. — Para cuadrar un polígono cualquiera, comenzaremos por transformar al polígono en un triángulo equivalente, siguiendo el procedimiento que acaba de indicarse, y luego construiremos el cuadrado equivalente a dicho triángulo (134, prob. 1.º).

137. Trazar una circunferencia que pase por dos puntos dados y sea tangente a una recta también dada. — Sean *A* y *B* los puntos, y *r* la recta que nos dan (fig. 64).

Suponiendo el problema resuelto, vemos que el centro *O* de la circunferencia pedida se encuentra en la intersección de la mediatriz del segmento *AB*, y la perpendicular a la recta *r* en el punto de tangencia *T*.

Para determinar este punto *T*, hay que tener presente que la tangente *PT* es media proporcional entre los segmentos *PA* y *PB*. Por tanto,

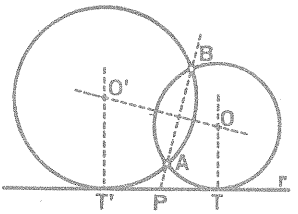


FIG. 64

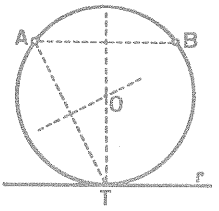


FIG. 65

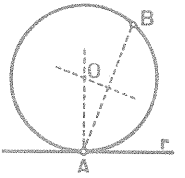


FIG. 66

basta prolongar BA hasta su intersección con r, construir el medio proporcional a los segmentos PA y PB, y llevarle sobre la recta r, a partir del punto P. Obtenido así el punto de contacto T, el centro de la circunferencia buscada estará en la intersección de la perpendicular por T a la recta r y la mediatriz de AB, o, también, en la intersección de las mediatrices de TA y AB.

Si los puntos A y B están a un mismo lado de r y la recta AB que determinan no es paralela a r, el problema tiene *dos soluciones* (circunferencias O y O'), pues el segmento medio proporcional PT puede llevarse a derecha e izquierda del punto P.

En el caso de estar A y B al mismo lado de r y ser paralela a esta recta la que aquéllos determinan, el problema tiene *una solución* solamente (fig. 65). El punto de tangencia T estará en la intersección de la mediatriz de AB y la recta r. Si uno de los puntos está en la recta, existe también únicamente *una solución* (fig. 66). Finalmente, si A y B están a distinto lado de r, no hay *ninguna solución*.

138. Sección áurea de un segmento.

Llamamos sección áurea de un segmento a la división de ese segmento en dos partes, tales que una de ellas sea media proporcional entre el segmento entero y la otra parte.

La parte media proporcional, que es la mayor, recibe el nombre de *parte áurea* del segmento. Si a es el segmento (fig. 67), y x la parte áurea, la otra parte será $a - x$, debiéndose verificar, según la definición, que

FIG. 67

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \qquad \text{o bien,} \qquad x^2 = a(a-x)$$

El hecho de presentarse la *sección áurea* en muchas figuras y cuerpos geométricos, hizo que los antiguos la designaran con ese nombre, para indicar la riqueza de sus aplicaciones.

139. Dado un segmento, determinar su parte áurea.

Sea el segmento $AB = a$ (fig. 68). En uno de sus extremos se levanta la perpendicular, y se toma sobre ella la longitud $OB = \frac{1}{2}a$. Haciendo centro en O, con radio $\frac{1}{2}a$, se traza una circunferencia, que será tangente a AB en B (por ser el radio perpendicular a AB), y cuyo diámetro será igual a a. Se traza la recta que pasa por A y O. El segmento AC es la parte áurea de AB. Bastará, por tanto, llevarlo sobre AB, y quedará resuelto el problema.

En efecto: por la potencia del punto A, es	$a^2 = AC \times AE = x(a+x)$
efectuando el paréntesis:	$a^2 = ax + x^2$
despejando x^2:	$x^2 = a^2 - ax$
sacando a factor común:	$x^2 = a(a-x)$

luego, x es la parte áurea de a.

Este problema suele enunciarse también así: *dividir un segmento en media y extrema razón.*

La sección áurea de un segmento nos será útil para hallar el lado del decágono y pentágono regular inscrito, y en consecuencia para dividir a la circunferencia en diez y cinco partes iguales.

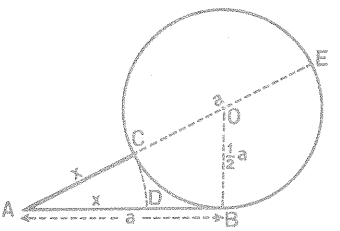


FIG. 68

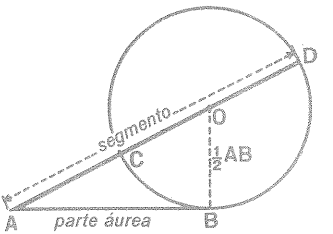


FIG. 69

140. Dada la parte áurea de un segmento, hallar éste.

Sea AB (fig. 69) la parte áurea del segmento que queremos hallar. La construcción que hemos de hacer es análoga a la del problema anterior. O sea: levantemos en B una perpendicular a AB y tomemos $OB = \frac{1}{2}AB$.

Trazando la recta que determinan los puntos A y O, tendremos en el segmento AD la solución del problema.

En efecto: en virtud de la potencia del punto A, es $\overline{AB}^2 = AD \times AC$

sustituyendo AC por su igual $AD - CD$: $\overline{AB}^2 = AD \times (AD - CD)$

reemplazando CD por su igual AB: $\overline{AB}^2 = AD \times (AD - AB)$

Luego, $AB = CD$ es la parte áurea del segmento total AD.

Comparando los resultados de las dos construcciones anteriores, se observa que la parte menor AC (fig. 69), obtenida al hallar el segmento total cuando se conoce su parte áurea, es a su vez la parte áurea de la parte mayor $AB = CD$. De aquí, deducimos la siguiente

PROPIEDAD. — *La parte menor que resulta al efectuar la división áurea de un segmento, es a su vez la parte áurea de la parte mayor.*

PROBLEMA. — *Calcular numéricamente la parte áurea de un segmento conocida la longitud de éste.*

En el triángulo rectángulo ABO (fig. 68), se verifica:

$$AO = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2 + a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5a^2}}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

Y como la parte áurea x es igual a $AO - CO$, o sea, a $AO - \frac{1}{2}a$, tenemos:

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

o sea,

$$\boxed{\text{parte áurea} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)}$$

141. Construcción de pentágonos y decágonos regulares. — Supongamos una circunferencia dividida en diez partes iguales. Numeremos los puntos de división y veamos la figura que se obtiene al unirlos de diversos modos.

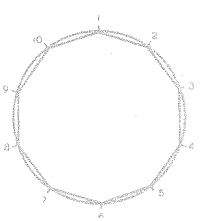


FIG. 70
Decágono

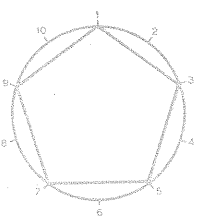


FIG. 71
Pentágono

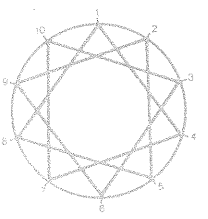


FIG. 72
Decágono estrellado

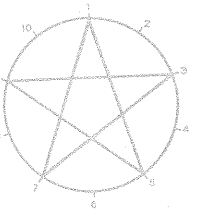


FIG. 73
Pentágono estrellado

1.° *Si los unimos de uno en uno, resulta un decágono regular convexo,* cuyo lado designaremos por l_{10} (fig. 70).

2.° *Si los unimos de dos en dos, resulta un pentágono regular convexo,* cuyo lado designaremos por l_5 (fig. 71).

3.° *Si los unimos de tres en tres, resulta un decágono regular estrellado,* cuyo lado designaremos por l'_{10} (fig. 72).

4.° Finalmente, *si los unimos de cuatro en cuatro, obtenemos un pentágono regular estrellado,* cuyo lado designaremos por l'_5 (fig. 73). Este mismo resultado lo obtendríamos también dividiendo a la circunferencia en cinco partes iguales, y uniendo luego los puntos de división de dos en dos.

Como consecuencia de lo anterior, vemos que para la construcción de pentágonos y decágonos regulares inscritos, convexos y estrellados, basta dividir la circunferencia en diez partes iguales, o de otro modo, basta hallar el lado del decágono regular inscrito.

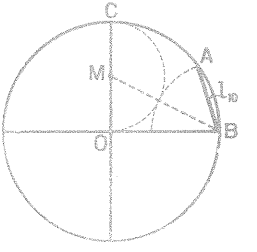


FIG. 74

Se demuestra en Geometría que el lado del decágono regular inscrito en una circunferencia es igual a la parte áurea del radio. Por lo cual, para inscribir un decágono regular en una circunferencia, se construirá el segmento áureo del radio y se llevará diez veces sucesivas como cuerda de la circunferencia. En la figura 74 se indica cómo suele procederse en la práctica.

EJERCICIOS

827. La suma de dos segmentos es 42 mm., y su producto, 361 mm². Construirlos.

828. Construir dos segmentos, sabiendo que su suma mide 40 mm., y su media proporcional, 13 mm.

829. Construir dos segmentos, conociendo su diferencia, 25 mm., y su producto, 289 mm².

830. La diferencia de dos segmentos es 38 mm., y su media proporcional, 25 mm. Construirlos.

Construir el cuadrado equivalente a cada uno de los polígonos siguientes. Los datos están expresados en milímetros.

831. Triángulo: $b = 70$, $h = 30$
832. Rectángulo: $b = 32$, $h = 12$
833. Romboide: $b = 23$, $h = 10$

834. Trapecio: $b = 30$, $b' = 20$, $h = 12$
835. Rombo: $d = 24$, $d' = 16$
836. Polígono regular: $p = 60$, $a = 8'6$.

837. Construir primeramente un hexágono irregular y luego hallar el cuadrado que le es equivalente.

838. Trazar una circunferencia que pase por dos puntos y sea tangente a una recta dada. Considerar los tres casos posibles.

839. Trazar un segmento rectilíneo de 34 mm. y determinar luego su parte áurea.

840. La parte áurea de un segmento mide 30 mm. Construir dicho segmento.

841. Calcular numéricamente la parte áurea de un segmento que mide 5 metros. (Tómese $\sqrt{5} = 2'236$).

842. Trazar una circunferencia de 2 cm. de radio y dividirla en diez partes iguales.

843. Trazar cuatro circunferencias de 24 mm. de radio e inscribir en ellas el decágono regular convexo, el pentágono regular convexo, el decágono regular estrellado y el pentágono regular estrellado.

19. Coordenadas cartesianas

142. Recta orientada. Segmento orientado. Medida algebraica de un segmento. — Sea una recta indefinida $X'X$ (figura 75) sobre la que se ha elegido un sentido de recorrido, por ejemplo de izquierda a derecha, llamado *sentido positivo;* el sentido contrario se denominará *sentido negativo.*

En estas condiciones, la recta $X'X$ recibe el nombre de *recta orientada.*

FIG. 75

Se denomina segmento orientado a la parte de la recta X'X recorrida por un punto móvil en un sentido determinado.

Para *designar* un segmento, se nombra en primer lugar el punto de partida del móvil, llamado *origen* del segmento, y en segundo lugar, el de llegada, llamado *extremo* del segmento.

Así, AB es un segmento orientado; A es su origen y B su extremo.

El punto móvil puede recorrer la recta $X'X$ en *dos sentidos opuestos.* Por consiguiente, dos segmentos son distintos si difieren en su *longitud* o en el *sentido de su recorrido.*

Por ejemplo, AB y BA son segmentos diferentes, pues aunque tienen la misma longitud están recorridos en sentidos opuestos. A estos segmentos que difieren sólo en el sentido se les llama *segmentos opuestos.*

Se denomina *medida algebraica de un segmento* de una recta orientada, el número racional que tiene por valor absoluto la medida de la longitud del segmento, y por signo + o −, según que el segmento sea positivo o negativo.

Para indicar la medida algebraica de un segmento, se coloca un trazo horizontal sobre las dos letras que sirven para designarle.

En la recta de la figura 75, se tiene $\overline{AB} = +3$, que se lee: *medida algebraica del segmento* AB *igual a más tres.* Del mismo modo, tendremos:

$$\overline{BC} = +2; \quad \overline{AU} = +1; \quad \overline{CB} = -2; \quad \overline{AD} = +\frac{5}{2}; \text{ etc.}$$

143. Eje de abscisas. Abscisa de un punto. — Sea $X'X$ (figura 76) una recta orientada en la que se ha fijado un punto O, llamado *origen*, y se ha tomado por unidad de longitud un segmento OU. La recta que cumple estas condiciones se denomina *eje de abscisas.*

Llamamos abscisa de un punto M del eje de abscisas a la medida algebraica del segmento OM que va del origen al punto M.

FIG. 76

Si la designamos por x, tendremos: $x = \overline{OM}$.

Un punto cualquiera del eje $X'X$ queda determinado cuando se conocen su abscisa y la unidad de longitud adoptada.

A todo número racional, corresponde un punto M, y solamente uno, del eje $X'X$.

El valor absoluto de la abscisa indica a qué distancia del origen está situado el punto M, y el signo expresa a qué lado se encuentra dicho punto, respecto del origen.

144. Variación de la abscisa. — 1.° Si el punto M se desplaza a partir de O en el sentido positivo, su abscisa x toma sucesivamente los valores 1, 2, 10, 100, ..., y todos los intermedios racionales. La abscisa x es en este caso una variable que acaba por ser mayor que cualquier número positivo dado por grande que se le suponga.

2.° Si el punto M se desplaza a partir de O hacia la izquierda, x toma sucesivamente los valores -1, -2, -10, -100, ..., y todos los intermedios, enteros y fraccionarios. O sea, que x es una variable que llega a ser menor que cualquier número negativo dado, por muy grande que sea su valor absoluto.

145. Longitud de un segmento orientado del eje, dado por las abscisas de sus extremos. — Resolvamos el siguiente

PROBLEMA. — *Si un punto* M *se desplaza sobre el eje* X'X, *a partir del origen* O, *primero* a *cm. y luego* b *cm., ¿a qué distancia de* O *se encuentra entonces? o, dicho de otro modo, ¿cuál es su abcisa final?*

Para resolver este problema en Aritmética, sería preciso distinguir varios casos, según el sentido de los desplazamientos de M. Veamos por medio de ejemplos cómo, merced a la introducción de los números negativos, la respuesta va siempre dada por la fórmula

$$x = a + b$$

EJEMPLO 1.° — El punto M se desplaza primero 3 cm. y luego 2 cm. hacia la derecha a partir de O.

En este caso, se tiene: $a = +3$, $b = +2$

luego, $x = (+3) + (+2) = 3 + 2 = +5$

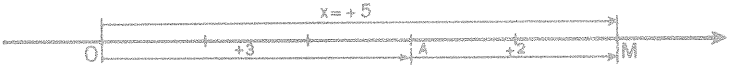


FIG. 77

Interpretación gráfica. — El examen de la figura, nos muestra cómo, en efecto, el punto M se ha detenido a 5 cm. a la derecha de O.

EJEMPLO 2.° — El punto M se desplaza primero 3 cm. hacia la derecha y luego 5 centímetros hacia la izquierda.

En este caso, se tiene:

$$a = +3, \qquad b = -5; \qquad \text{luego,} \qquad x = (+3) + (-5) = 3 - 5 = -2$$

FIG. 78

Interpretación gráfica. — Examinando la figura, vemos, en efecto, que el punto M se ha detenido a 2 cm. *a la izquierda* de O.

Como vemos, una sola fórmula da la respuesta en todos los casos: las fórmulas algebraicas son generales.

Supongamos ahora un segmento orientado $\overline{AB}$ (fig. 79) cuya medida queremos hallar, conociendo las abscisas de sus extremos.

FIG. 79

Acabamos de ver que si un punto se desplaza sobre un eje, a partir del origen O, primero en una longitud a, y luego en una longitud b, la suma de estas dos longitudes da siempre la abscisa final del punto.

Tendremos, por tanto:

$$a + b = x \qquad \text{o bien,} \qquad \overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$$

de donde $$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

Luego:

La medida algebraica de un segmento orientado es igual a la diferencia entre la abscisa de su extremo y la abscisa de su origen.

Si designamos por x_1 la abscisa del punto A y por x_2 la del punto B, tendremos:

$$\boxed{\overline{AB} = x_2 - x_1}$$

EJEMPLO. — La medida del segmento AB, siendo $+3$ la abscisa del punto A y -2 la del punto B, será

$$\overline{AB} = -2 - (+3) = -2 - 3 = -5$$

FIG. 80

Interpretación gráfica. — Examinando la fig. 80, vemos que, en efecto, para ir de A a B hay que recorrer 5 unidades *hacia la izquierda.*

146. Ejes coordenados rectangulares. — Tracemos en un plano dos rectas perpendiculares, $X'X$ e $Y'Y$ (figura 81), y consideremoslas como dos ejes de abscisas. El punto común O, será el origen para ambos ejes.

Las dos rectas así elegidas constituyen un *sistema de ejes coordenados rectangulares.*

Estableceremos además los siguientes convenios:

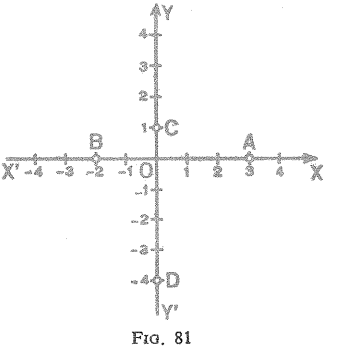


FIG. 81

1.° El eje $X'X$ se denomina *eje de abscisas,* o también *eje de las x.* Suele tomarse en posición horizontal, y el sentido positivo es hacia la derecha.

2.° El eje $Y'Y$ se llama *eje de ordenadas,* o también *eje de las y.* De acuerdo con lo anterior, su posición suele ser vertical, y el sentido positivo es hacia arriba.

3.° La medida del segmento que va desde el origen O a un punto del eje $Y'Y$, recibe el nombre de *ordenada* de ese punto, en vez de abscisa.

En la figura: la abscisa del punto A es $+3$; la del punto B, -2; la ordenada del punto C es $+1$; la del punto D, -4.

147. **Coordenadas de un punto en el plano.** — Supongamos un sistema de ejes coordenados rectangulares (figura 82), y sea P un punto cualquiera de su plano.

Proyectemos ese punto P sobre los dos ejes, y sean P' y P'' los puntos obtenidos, respectivamente, sobre el eje de abscisas y sobre el eje de ordenadas.

Llamamos ABSCISA del punto P, a la medida del segmento OP', es decir, a la abscisa de su proyección sobre el eje $X'X$.

Llamamos ORDENADA del punto P, a la medida del segmento OP'', es decir, a la ordenada de su proyección sobre el eje $Y'Y$.

La abscisa de un punto en general se representa por x, y la ordenada por y. Según esto, para el punto P tendremos:

$$\overline{OP'} = x; \qquad \overline{OP''} = y$$

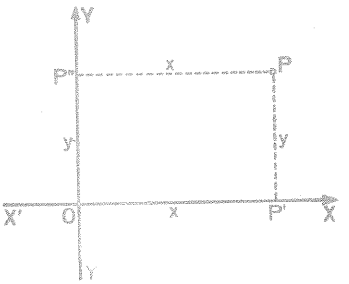


FIG. 82

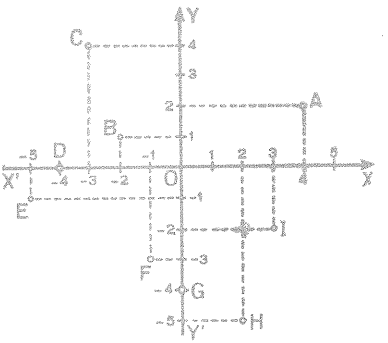


FIG. 83

Los dos valores x e y se llaman conjuntamente *coordenadas* del punto P. Las coordenadas de un punto se indican escribiéndolas entre paréntesis, primero la abscisa y a continuación, separada por una coma, la ordenada, así: $P(x, y)$.

Recíprocamente: Si suponemos un par de números, positivos o negativos, enteros o fraccionarios, para coordenadas, x e y, de un punto P,

y conocemos la unidad de longitud adoptada, podremos hallar los segmentos OP' y OP'', quedando determinado el punto P con solo trazar las perpendiculares PP' y PP'' a los ejes.

EJEMPLO. — En la figura 83 se han representado los puntos siguientes:

$$A\,(4,\ 2);\quad B\,(-2,\ 1);\quad C\,(-3,\ 4);\quad D\,(-4,\ 0);\quad E\,(-5,\ -1);$$
$$F\,(-1,\ -3);\quad G\,(0,\ -4);\quad H\,(2,\ -5);\quad I\,(3,\ -2)$$

De este modo se logra una doble correspondencia:

1) **Todo punto de un plano se puede representar por un par ordenado de números, que son sus coordenadas.**

2) Inversamente: **A todo par ordenado de números le corresponde un punto en el plano.**

148. Observación. — Los dos ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones o *cuadrantes*, que se distinguen llamándolos: *primer cuadrante*, a la región XOY; *segundo*, a la región YOX'; *tercero*, a la $X'OY'$, y *cuarto* a la $Y'OX$.

149. Distancia entre dos puntos del plano. — Sean los puntos A y B (figura 84), y supongamos que x_1, y_1 son las coordenadas de A y x_2, y_2 las de B.

Trazando por A la paralela AC al eje de abscisas, se forma el triángulo rectángulo ABC, en el que se cumple la igualdad

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

y como

$$AB = d \qquad AC = x_2 - x_1 \qquad BC = y_2 - y_1$$

tendremos la fórmula

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

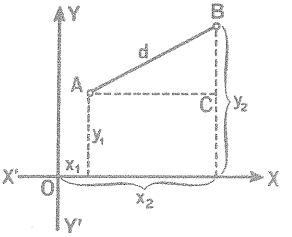


FIG. 84

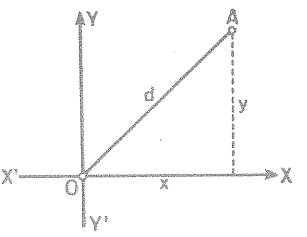


FIG. 85

EJEMPLO. — La distancia entre los puntos (3, 8) y (−5, −7), será

$$d = \sqrt{[3-(-5)]^2 + [8-(-7)]^2} = \sqrt{8^2+15^2} = \sqrt{289} = 17$$

Si uno de los puntos dados es el origen de coordenadas (figura 85) y las coordenadas del otro son x, y, la distancia d vendrá expresada por la fórmula

$$d = \sqrt{x^2+y^2}$$

EJEMPLO. — La distancia del origen al punto (−3, 4), será

$$d = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

EJERCICIOS

844. En una hoja de papel cuadriculado corriente, trácese un eje de abscisas $X'X$, y sitúense los puntos que tienen por abscisa:

$$x = 3;\ x = 10;\ x = -2;\ x = -6;\ x = -1;\ x = -8;\ x = 7;\ x = 0$$

845. Situar en un eje de abscisas los puntos cuyas abscisas son:

$$x = \frac{7}{3};\ x = \frac{9}{2};\ x = -\frac{3}{2};\ x = \frac{5}{4};$$

$$x = -\frac{9}{5};\ x = \frac{17}{2};\ x = -\frac{15}{4};\ x = \frac{23}{4}$$

846. Hallar la longitud del segmento orientado AB, sabiendo que las abscisas de los puntos A y B son, respectivamente:

1.º 4 y −5	4.º $-\frac{3}{2}$ y $-\frac{15}{4}$	7.º 16 y 21
2.º 9 y 13	5.º $\frac{23}{5}$ y $\frac{7}{15}$	8.º −1 y 11
3.º −3 y 7	6.º −18 y −5	9.º −12 y 0

Hacer la figura que corresponda a cada caso e interpretar el resultado.

847. Los puntos A, B y C tienen, respectivamente, por abscisas 7, −3 y −7. Calcular la medida algebraica de los seis segmentos AB, AC, BC, CA, BA y CB.

848. Fijada en la pilastra de un puente, existe una escala graduada para indicar el nivel alcanzado por el agua. En ella se han leído sucesivamente los niveles siguientes:

1.º +4 y +10	4.º 12 y −3	7.º −15 y 0
2.º −2 y −9	5.º −7 y +2	8.º 10 y 0
3.º −7 y −39	6.º 0 y +13	

Calcular en cada caso el desplazamiento del nivel del agua e interpretar gráficamente el resultado.

849. En una hoja de papel cuadriculado corriente, trácese un sistema de ejes coordenados rectangulares, y sitúense los puntos siguientes:

$A(4, 3)$; $B(7, 2)$; $C(-3, 5)$; $D(-3, 0)$; $E(-2, -3)$;
$F(0, -5)$; $G(2, 0)$; $H(1, -3)$

850. Comprobar que los puntos siguientes están sobre una misma recta:

$(6, 6)$; $(4, 2)$; $(2, -2)$; $(0, -6)$; $(-2, -10)$

851. Comprobar que los puntos siguientes pertenecen a una recta que pasa por el origen: $(3, 3)$; $(7, 7)$; $(-1, -1)$; $(-4, -4)$.

852. El mismo ejercicio para los puntos $(-5, 5)$; $(-1, 1)$; $(1, -1)$; $(3, -3)$.

853. Representar sobre un sistema de ejes coordenados los grupos de puntos siguientes, y unir después por una línea los correspondientes a cada grupo:

GRUPO *a*) $(3, 4)$; $(3, 6)$; $(3, -4)$; $(3, -2)$
GRUPO *b*) $(4, -2)$; $(5, -2)$; $(-3, -2)$; $(-5, -2)$
GRUPO *c*) $(0, 3)$; $(0, 5)$; $(0, -6)$; $(0, -3)$
GRUPO *d*) $(3, 0)$; $(5, 0)$; $(-3, 0)$; $(-5, 0)$

Dígase luego qué clase de línea es la que une los puntos de cada grupo, y qué posición tiene en el plano respecto de los ejes.

854. Representar sobre un sistema de ejes coordenados los grupos de puntos siguientes, y unir luego cada dos puntos consecutivos del mismo grupo por una recta:

a) (−3, 10); (−2, 5); (−1, 2); (0, 1); (1, 2); (2, 5); (3, 10)

b) (−3, −10); (−2, −5); (−1, −2); (0, −1); (1, −2); (2, −5); (3, −10)

c) (10, 3); (5, 2); (2, 1); (1, 0); (2, −1); (5, −2); (10, −3)

d) (−10, 3); (−5, 2); (−2, 1); (−1, 0); (−2, −1); (−5, −2); (−10, −3)

855. Véase gráficamente qué clase de cuadrilátero es el que tiene por vértices los puntos (−4, −3), (0, 4), (4, 3) y (0, −4).

856. Tres vértices de un paralelogramo tienen por coordenadas (1, 2), (4, −4) y (−5, −7). Hallar gráficamente las coordenadas del cuarto vértice.

857. Hallar la distancia que hay entre los siguientes pares de puntos:

(−4, 3) y (5, −6); (2, 5) y (5, 2); (−4, −7) y (0, 0)

858. Hallar las longitudes de los lados del triángulo cuyos vértices son

$A\,(4, -2)$, $B\,(-2, 6)$ y $C\,(-8, -2)$

859. Hallar qué clase de triángulo es el que tiene por vértices

$A\,(2, 3)$, $B\,(4, -1)$ y $C\,(-6, -1)$

860. Averiguar qué clase de triángulo se obtiene al unir los puntos (−3, 2), (3, 10) y (7, 2). ¿Cuál es su perímetro?

861. Comprobar que los puntos (1, 7), (4, 6), (6, 2), (5, −1), (1, −3), (−3, −1), (−4, 2) y (−3, 5) pertenecen a una circunferencia de centro $O\,(1, 2)$.

20. Representaciones gráficas. - Idea de función

150. Constantes y variables. — *Una letra empleada para representar un número determinado y fijo se dice que es una constante.*

Hay ciertas constantes que aparecen continuamente en los problemas matemáticos. El número $\pi = 3'1416$, o razón de la circunferencia al diámetro, es una de dichas constantes. Otras constantes hay que lo son en un mismo problema, pero que cambian de valor al variar el problema. El radio del círculo, o el lado del cuadrado, son constantes cuando nos referimos a un círculo o cuadrado determinados.

Variable es un símbolo (generalmente una letra) que puede tomar diversos valores.

Por ejemplo: el número que expresa la velocidad de un automóvil, a medida que va acelerándose, es una cantidad variable; el precio de una mercancía puede cambiar frecuentemente en el mercado, por lo que constituye también una variable.

En Álgebra, las variables suelen representarse por las últimas letras del alfabeto, *x*, *y*, *z*. Pero en los problemas de Geometría, de Física, etc., lo corriente es designar a las variables (o cantidades en general) por las letras iniciales de la dimensión o cantidad que representan. Así: *r* por radio, *b* por base, *a* por altura, *p* por peso, *e* por espacio, *v* por velocidad, *t* por tiempo, etc.

151. Breve idea de función. — La noción de función es uno de los conceptos fundamentales de la Matemática. La idea principal que encierra la noción de función, es la de *dependencia* de una cantidad respecto de otra u otras cantidades.

El hombre se siente inclinado a establecer relaciones entre los fenómenos de la vida diaria. Con frecuencia se oye afirmar que una cosa depende de otra, que tal fenómeno se debe a tales o cuales causas, que determinado acontecimiento ha sido motivado por estos o aquellos sucesos.

En Matemáticas, cuando se habla de la relación que existe entre dos variables, o sea, de la dependencia que los valores de una de ellas tiene con respecto a los valores de la otra, se dice que dichas variables son *función* la una de la otra.

Ejemplos: 1.° El importe de una mercancía, si se vende a determinado precio el kilo, dependerá del número de kilos comprados; en otros términos, dicho valor es una *función* del número de kilos.

2.° El área de un círculo depende de la longitud del radio; es decir, que el área es *función* del radio.

3.° El espacio recorrido por un automóvil que marcha a determinada velocidad, depende, o es *función,* del tiempo empleado en recorrerlo.

DEFINICIÓN:

Decimos que una variable y es función de otra variable x, cuando a cada valor asignado a x corresponde otro a y.

La variable x, a la cual se atribuyen valores, se llama *variable independiente,* e y, cuyos valores dependen de los asignados a x, se denomina *variable dependiente* o, simplemente, *función.*

En los ejemplos anteriores, el valor de una variable depende del que tiene otra. Pero ocurre a menudo que una variable es función de dos o más variables a la vez; por ejemplo, el área de un rectángulo es función de la base y de la altura.

152. Ejemplos de funciones sencillas. — Aclaremos las ideas expuestas anteriormente por medio de algunos ejemplos concretos.

EJEMPLO 1.° — *El importe de cierta cantidad de azúcar, suponiendo que éste se vende a* 12 *ptas. kilo, es función del número de kilos comprados.*

En efecto: si designamos por x el número de kilos comprados, y por y su importe en ptas., tendremos:

$$y = 12x$$

A cada valor que demos a x (variable independiente), obtendremos otro para y (función), como se ve en la siguiente *tabla de valores:*

Cuando $x =$	1	3	4'5	7'25	10	50	100	...	variable ind.
$y =$	12	36	54	87	120	600	1.200	...	función

Observemos que los valores de x los podemos fijar libremente, mientras que los de y dependen de los que hemos asignado a x.

EJEMPLO 2.º — *El área de un círculo es función del radio con que está trazado.*

Por Geometría sabemos que

$$A = \pi r^2 = 3'1416 \times r^2$$

Asignando valores a r (variable independiente) y hallando los correspondientes de A (variable dependiente o función), obtenemos la siguiente tabla de valores:

Cuando $r =$	1	2	3'8	13	...	variable ind.
$A =$	3'1416	12'566	45'365	530'93	...	función

Sucede, pues, que a cada valor atribuído a la variable r, corresponde otro a la variable A, lo cual indica que A es función de r.

EJEMPLO 3.º — *La distancia o espacio recorrido por un automóvil que marcha a 60 Km. por hora, es función del tiempo empleado en recorrerlo.*

En efecto: como el espacio recorrido por un móvil se obtiene multiplicando la velocidad por el tiempo, tendremos (si t va expresado en horas):

$$e = 60\,t$$

Dando valores a t y hallando los correspondientes de e, resulta la siguiente tabla de valores:

Cuando $t =$	0	1	$2\frac{1}{2}$	3	$5\frac{1}{4}$	7	...	variable ind.
$e =$	0	60	150	180	315	420	...	función

En ella vemos que a cada valor asignado a t, corresponde otro a e; luego, la variable e es función de la variable t.

153. Representación gráfica de la función de proporcionalidad directa. — Cuando dos variables x e y están relacionadas por una función de la forma

$$y = kx \qquad (k \text{ es una constante})$$

dichas variables son dos magnitudes DIRECTAMENTE PROPORCIONALES, ya que, en efecto, sucede que *al multiplicar el valor de* x *por un número, el correspondiente valor de* y *queda multiplicado por el mismo número.*

La función $y = kx$ puede escribirse también así (basta dividir a los dos miembros por x):

$$\frac{y}{x} = k$$

lo que nos dice que *la razón de dos valores correspondientes cualesquiera de las variables* y y x, *es constante.* Este resultado, que confirma lo estudiado el curso pasado al hablar de las magnitudes directamente proporcionales, se denomina *constante de proporcionalidad.*

La proporcionalidad directa va, pues, expresada por una función de la forma $y = kx$, en la que k es la constante de proporcionalidad.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN $y = kx$. — Supongamos que k vale 2, es decir, que se trata de la función $y = 2x$.

Calculemos los valores de y que corresponden a una serie de valores dados a x. Tendremos:

Si $x =$	-2	-1	0	1	2
$y =$	-4	-2	0	2	4

Sobre un sistema de ejes coordenados rectangulares (figura 86), determinemos los puntos A, B, O, C, D que tienen como coordenadas, respectivamente, los pares de valores $(-2, -4)$, $(-1, -2)$, $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$ que se corresponden en la tabla anterior. Uniendo dichos puntos por una línea continua, veremos que ésta es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

Como el resultado sería análogo para otro valor cualquiera de k distinto de 2, diremos que

La gráfica de la función de proporcionalidad directa, y = kx, es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

Como una recta queda determinada cuando se conocen dos de sus puntos, para construir la recta representativa de la función $y = kx$, bastará señalar dos puntos cuyas coordenadas satisfagan a la ecuación $y = kx$. Ordinariamente se toman los puntos (0, 0) y (1, k).

EJERCICIO. — Construir la gráfica de las funciones

$$y = 3'5\,x, \qquad y = -x, \qquad y = -2\,x.$$

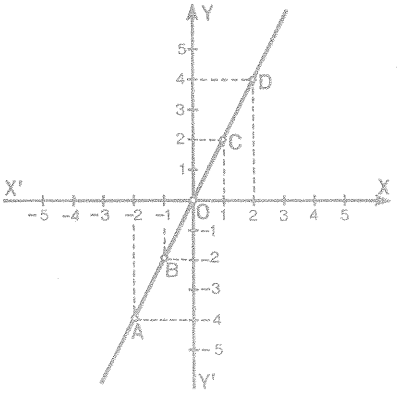


FIG. 86

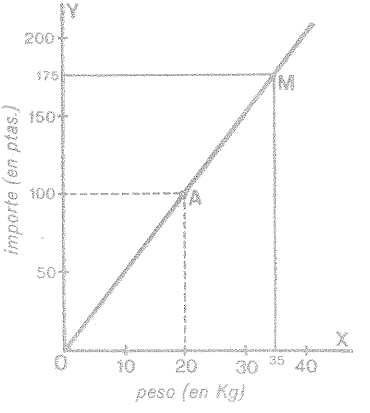


FIG. 87

154. Aplicación a algunos casos particulares. — La representación gráfica de las funciones ofrece gran interés para el estudio de las cuestiones a que se refieren. Para comprobarlo, vamos a considerar algunos casos particulares en los que aparece la función de proporcionalidad directa.

I. IMPORTE DE UNA MERCANCÍA DADO EL PRECIO. — *Hallar gráficamente el importe que ha de pagarse por una determinada cantidad de trigo que se vende a 5 ptas. kilo.*

El dinero que se ha de pagar por una mercancía es directamente proporcional al número de kilos comprados. Es decir, designando por x el número de kilos comprados, y por y su importe en pesetas, resulta

$$y = 5x$$

función que, como se ve, es del mismo tipo que $y = kx$. Su gráfica, por tanto, será una recta que pasa por el origen.

En un sistema de ejes coordenados (figura 87), representemos el peso (en kilos) sobre el eje OX, y el importe (en ptas.) sobre el eje OY. Para mayor exactitud en el trazado de la recta, sirvámonos del punto (0, 0) y de otro que se halle más alejado de éste que el (1, 5); por ejemplo el (20, 100).

Obtenida la gráfica, podemos hallar directamente el importe de una determinada cantidad de trigo. Supongamos, por ejemplo, que se desea saber lo que ha de pagarse por 35 Kg. Bastará levantar una perpendicular al eje OX en el punto de abscisa $x = 35$, y luego, por el punto de intersección de dicha perpendicular con la gráfica, trazaremos una perpendicular al eje OY, la cual corta a dicho eje en el punto de ordenada $y = 175$. Este será, expresado en pesetas, el importe de 35 Kg. de trigo.

OBSERVACIONES. — 1.ª Adviértase que no es necesario que las unidades tomadas en ambos ejes sean iguales. Por el contrario, sucede a menudo que es preciso adoptar escalas distintas, si se quiere dar cabida en el papel a la parte de gráfica que nos interesa.

2.ª Cuando, por la índole del problema, a la variable independiente sólo pueden asignársele valores positivos, bastará trazar la parte de gráfica situada en el primer cuadrante.

II. LONGITUD DE UNA CIRCUNFERENCIA. — *Hallar gráficamente la longitud de una circunferencia trazada con un radio determinado.*

La longitud de una circunferencia es directamente proporcional al radio con que está trazada. Dicha longitud, por tanto, irá expresada por una función de la forma $y = k\,x$. En efecto: sabemos por Geometría que

$$C = 2\,\pi\,r$$

fórmula en la que r representa a la variable independiente, C a la función, y $2\,\pi$ a la constante de proporcionalidad. Por consiguiente, la gráfica de la función $C = 2\,\pi\,r$ será una recta que pasa por el origen.

Elijamos un sistema de ejes coordenados y señalemos en el de las x la escala de valores que damos a r, y en el de las y los correspondientes a C (figura 88). Para el trazado de la recta, unamos el punto (0, 0) con otro cualquiera, como el $(20, 40\,\pi)$.

Construída la gráfica, obtendremos la longitud de la circunferencia que tiene por radio un valor determinado, por ejemplo $r = 13'4$ unidades de las adoptadas para el eje de las x, trazando al eje OX una perpendicular en el punto de abscisa 13'4, y desde el punto en que ésta corte a la gráfica, construyendo otra perpendicular al eje OY. La ordenada corres-

pondiente al punto de intersección de esta última con dicho eje, será la longitud pedida; en nuestro caso, $26'8\,\pi$ unidades, o sea, 84'19 unidades.

III. ESPACIO RECORRIDO POR UN MÓVIL QUE SE MUEVE CON MOVIMIENTO UNIFORME. — *Hallar gráficamente el espacio recorrido en un tiempo determinado por un peatón que camina a razón de 4 Km./hora.*

La distancia o espacio recorrido por un móvil que se mueve con velocidad constante es directamente proporcional al tiempo empleado. Por consiguiente, conocida la velocidad (en nuestro problema $v = 4$ Km./h.).

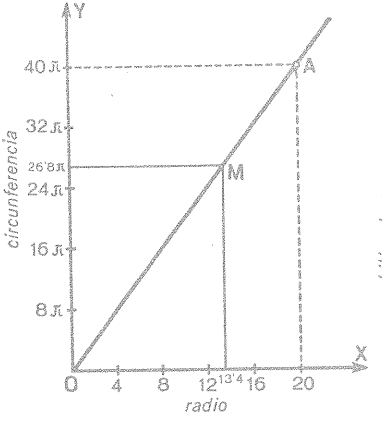


FIG. 88

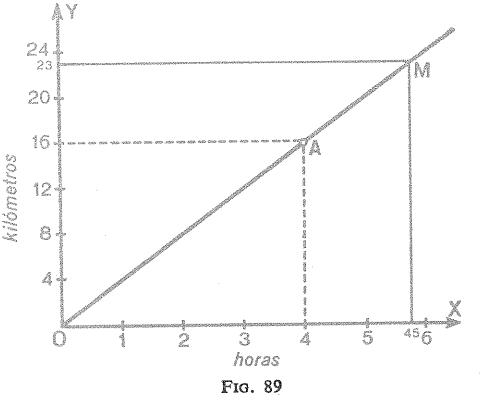


FIG. 89

la fórmula que nos dé el espacio será una función del tipo $y = k\,x$. Efectivamente:

$$e = 4\,t$$

En la figura 89 está representada la gráfica de esta función, y en ella se indica también el modo de hallar el espacio recorrido por el peatón en 5 horas y $\frac{3}{4}$. Dicho espacio es igual a 23 Km.

155. Ecuación lineal con dos incógnitas. Su representación gráfica. — Como ya se dijo anteriormente (75), las ecuaciones de primer grado se denominan también *ecuaciones lineales*. Consideremos una ecuación lineal con dos incógnitas. Sea, por ejemplo,

$$2\,x - y = 6$$

Esta ecuación, como sabemos, puede tener infinitas soluciones: a cada valor que asignemos a x corresponde otro para y, y viceversa. Podemos considerar, por tanto, a las incógnitas x e y como dos variables, función una de otra. Sea, por ejemplo, y la variable que tomamos como función Despejándola, resulta

$$y = 2x - 6$$

En consecuencia, diremos:

Toda ecuación lineal con dos incógnitas puede considerarse como una función de la forma $y = ax + b$.

Si se trata, por ejemplo, de la ecuación $2x + 3y = 12$, al expresar y como función *explícita* de x, es decir, despejándola, tendremos:

$$y = \frac{-2x + 12}{3} = -\frac{2}{3}x + 4$$

igualdad en la que a viene representada por $-\frac{2}{3}$, y b por $+4$.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA. — Veamos cuál es la representación gráfica de una ecuación lineal con dos incógnitas. Sea el primero de los dos ejemplos antes considerados,

$$2x - y = 6 \qquad \text{o su equivalente} \qquad y = 2x - 6$$

Si asignamos valores a x y hallamos los correspondientes de y, obtendremos la siguiente tabla de valores:

Si $x =$	6	4	2	0	-2
$y =$	6	2	-2	-6	-10
Puntos	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*

Los valores de x e y que se corresponden pueden considerarse:

1.° *Como soluciones de la ecuación propuesta.*

2.° *Como coordenadas de otros tantos puntos, los cuales, representados en un plano y considerados en su conjunto, constituirán la* GRÁFICA *o* LUGAR *de la ecuación.*

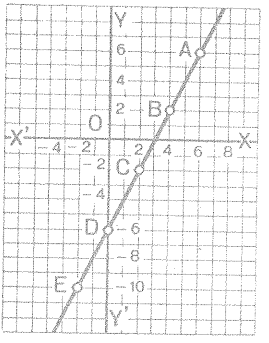


FIG. 90

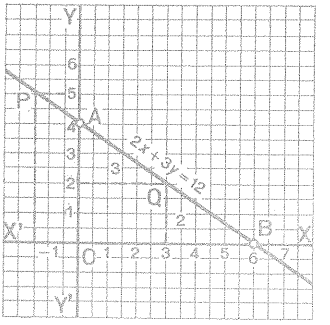


FIG. 91

Así, trazando los ejes $X'X$ e $Y'Y$ (figura 90) y llevando sobre ellos la unidad adoptada, determinemos la posición de los puntos $A\,(6, 6)$, $B\,(4, 2)$, $C\,(2, -2)$, $D\,(0, -6)$ y $E\,(-2, -10)$. Uniéndolos luego por una línea, veremos que la gráfica de la ecuación $y = 2x - 6$ es una recta.

Si ampliáramos la tabla de valores en ambos sentidos (dando a x nuevos valores y hallando los correspondientes de y), observaríamos que los puntos obtenidos se encuentran también en la recta AE. Viceversa: las coordenadas de cualquier otro punto perteneciente a la recta, distinto de los hallados, satisfará asimismo a la ecuación considerada.

Cualquiera que sea la ecuación, si es de primer grado con dos incógnitas, sucederá siempre que la gráfica es una recta.

Por consiguiente, para su trazado bastarán dos puntos. Generalmente, los puntos más convenientes son aquellos en los que la recta corta a los ejes, uno de los cuales tendrá por abscisa $x = 0$, y el otro tendrá por ordenada $y = 0$. Así, en el ejemplo anterior nos hubieran bastado los puntos $D\,(0, -6)$ y $(3, 0)$. No obstante, si dichos puntos estuvieran muy próximos, o la recta pasara por el origen, será necesario hallar dos puntos convenientemente distanciados, para que el trazado de la recta se haga con mayor exactitud.

EJEMPLO. Trazar la recta representativa de la ecuación $2x + 3y = 12$.

Dibujemos un par de ejes coordenados $X'X$ e $Y'Y$ (figura 91), y llevemos sobre ellos una unidad cualquiera. Para hallar los puntos en que la recta corta a los ejes, diremos:

$$2x + 3y = 12 \begin{cases} \text{para } x = 0,\ y = 4, \ldots\ldots \text{ punto } A\,(0,\ 4) \\ \text{para } y = 0,\ x = 6, \ldots\ldots \text{ punto } B\,(6,\ 0) \end{cases}$$

Obtenidos dichos puntos, bastará trazar la recta AB que ellos determinan, para tener la gráfica buscada.

Las coordenadas de cualquier punto de esta recta deberán satisfacer a la ecuación propuesta. Así, por ejemplo, los puntos $P\,(-1'5,\ 5)$ y $Q\,(3,\ 2)$ nos dan, respectivamente,

$$2 \cdot (-1'5) + 3 \cdot 5 = 12 \qquad \text{y} \qquad 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$$

862. La altura de un rectángulo equivale a tres veces la longitud de la base. Expresar el área A de dicho rectángulo como una función de la base b.

863. La base de un triángulo equivale a dos veces la altura h. Expresar el área A como función de h.

864. El lado de un triángulo equilátero es l. Expresar la altura h del triángulo como función de l (figura 92).

865. Expresar la superficie S de un triángulo equilátero como función del lado l.

866. Un rectángulo $ABCD$ de altura igual a x, está inscrito en un círculo cuyo radio es 10 (figura 93). Expresar la superficie del rectángulo como función de x.

867. Expresar el volumen de un cubo como función del lado l.

868. Un triángulo equilátero ABC está inscrito en un círculo de radio r (figura 94). Expresar el área A del triángulo como función de r.

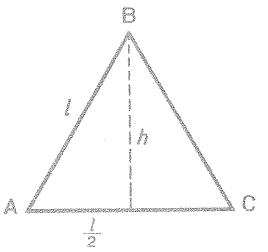


FIG. 92

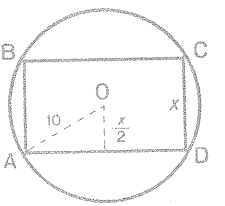


FIG. 93

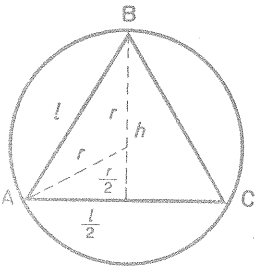


FIG. 94

869. Expresar el área de un círculo como función de su circunferencia.

Representar gráficamente las siguientes funciones:

870. $y = 3'5\,x$ **871.** $y = \frac{3}{2}x$ **872.** $y = -\frac{x}{3}$ **873.** $y = -\frac{3}{2}x$

874. Representar sobre el mismo par de ejes la gráfica de las funciones $y = x$ e $y = -x$. ¿Qué representan las rectas obtenidas en los ángulos formados por los ejes coordenados?

875. Sobre el mismo par de ejes, representar gráficamente las funciones $y = \frac{1}{2}x$ e $y = 2x$. Tómese luego sobre la primera recta el punto A de abscisa $OP = 2$, y sobre la segunda el punto B, de ordenada $OQ = 2$. Comparar los triángulos OPA y OQB y deducir de esta comparación que las dos rectas obtenidas OA y OB son simétricas respecto de la bisectriz del ángulo XOY.

876. Representar sobre el mismo par de ejes las funciones $y = 3x$ e $y = -\frac{1}{3}x$. Sobre la primera recta, tómese luego el punto M de abscisa $OA = 1$, y sobre la segunda el punto N de abscisa $OB = 3$. Comparar los triángulos OAM y OBN y demostrar que las dos rectas OM y ON son perpendiculares.

877. Representar gráficamente el importe de una longitud de tela, sabiendo que por 3 metros de la misma se han pagado 72 ptas. Determinar luego gráficamente: 1.°, el importe de 4'20 metros; 2.°, la longitud de tela que puede adquirirse por 60 pesetas.

878. Resolver el problema anterior, suponiendo que 2'40 m. valen 84 pesetas.

879. Representar gráficamente la distancia recorrida por un ciclista, sabiendo que en 2 horas y 20 minutos recorrió 63 Km. Determinar luego gráficamente: 1.°, la distancia recorrida en 1 h. 40 m.; 2.°, el tiempo invertido en recorrer 36 Km.

880. Representar gráficamente la distancia recorrida por un automóvil, sabiendo que en 1 h. 40 m. ha recorrido 125 Km. Determinar luego gráficamente: 1.°, la distancia recorrida en 2 h. 20 m.; 2.°, el tiempo invertido en recorrer 60 Km.

881. Representar sobre el mismo par de ejes las distancias recorridas por un motorista y un ciclista, suponiendo que ambos salieron al mismo tiempo de la misma ciudad y que los dos marchan por la misma carretera y en el mismo sentido. Se sabe que el primero ha recorrido 60 Km. en 1 h. 15 m. y el segundo 32 Km. en 1 h. 20 m. Determinar luego gráficamente: 1.°, la distancia que los separa después de 2 h. 10 m. de marcha; 2.°, el tiempo que media entre el paso del motorista y el del ciclista por el kilómetro 40.

Representar gráficamente las siguientes ecuaciones:

882. $x + y = 8$
883. $4x + y = 12$
884. $3x + 4y = 12$
885. $2x + 3y = -6$
886. $2x + 5y = 15$
887. $4x - 3y = 24$
888. $x + 6y = 18$
889. $7x + 2y = 21$
890. $4x - 7y = 20$
891. $3x + 24 = y$
892. $y = 4x + 20$
893. $7 + 2y = x$

894. Sea un triángulo equilátero ABC cuyo lado mide 3 cm. En él se traza una paralela a BC que corta a AB en M y a AC en N. Si designamos al segmento AM por x, calcúlese y represéntese gráficamente el perímetro y del trapecio $BMNC$. Limitar la gráfica a la parte en que tiene significado geométrico.

895. Dos lados de un triángulo miden 3 cm. y 5 cm. Sea x la longitud del tercero. Con estos datos, calcular y representar gráficamente el perímetro y del triángulo. Limitar la gráfica.

896. Las dimensiones de un rectángulo son 5 cm. y 7 cm. Calcular y representar gráficamente el perímetro y del rectángulo que resulta al disminuir en la misma longitud x las dimensiones del anterior.

897. Un vaso vacío pesa 300 gramos. Calcular su peso y después de echar en él x cm^3 de un aceite cuya densidad es 0'9. Representar gráficamente la variación de y en función de x.

898. Una persona que dispone de 12.000 ptas., coloca una parte de este capital a interés simple al 4 % y el resto al 6 %. Calcular y representar gráficamente su renta anual y en función de la parte x colocada al 4 %.

899. Un capital de 8.000 ptas. se ha colocado a interés simple al 5 %. Se desea: 1.º, calcular y representar gráficamente la suma y de dicho capital más los intereses producidos en x años; 2.º, determinar el valor de x para que la suma y sea igual a 10.800 ptas.

900. Un depósito que contiene 360 litros de agua, está alimentado por un grifo que arroja 12 litros por minuto. Calcular y representar gráficamente la cantidad y de agua contenida en el depósito en un instante dado. Deducir luego en la gráfica: 1.º, el tiempo que ha de pasar para que el depósito contenga 600 litros; 2.º, la cantidad de agua contenida al cabo de 16 minutos.

21. Resolución gráfica de sistemas

156. Resolución gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. — Para resolver gráficamente un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, basta construir las rectas correspondientes a cada una de las ecuaciones. *Las coordenadas del punto de intersección serán la solución del sistema.*

En efecto: por pertenecer dicho punto a las dos rectas, sus coordenadas deberán satisfacer a la vez a ambas ecuaciones

EJEMPLO. — Resolver gráficamente el sistema

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ 2x - y = 9 \end{cases}$$

Para $x + y = -3$, se tiene:

Si $x = 0$, $y = -3$, ... $A\,(0, -3)$
Si $y = 0$, $x = -3$, ... $B\,(-3, 0)$

Y para $2x - y = 9$, resulta:

Si $x = 0$, $y = -9$, ... $D\,(0, -9)$
Si $y = 0$, $x = 4\frac{1}{2}$, ... $C\,(4\frac{1}{2}, 0)$

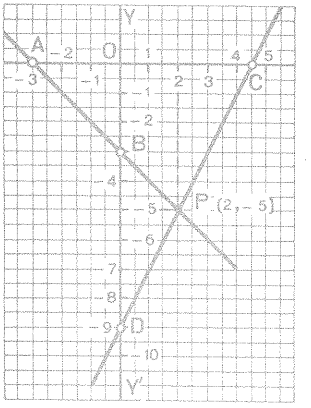


FIG. 95

Bastará ahora trazar las rectas AB y CD (figura 95) determinadas por esos dos pares de puntos. Las coordenadas del punto P de intersección verificarán a la vez a las dos ecuaciones. Luego, la solución del sistema propuesto es

$$x = 2 \qquad y = -5$$

resultado que está de acuerdo con el que hallaríamos si hiciéramos la resolución analítica (por cálculo) del sistema dado.

En general, podemos decir: *Para resolver gráficamente el sistema*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

construiremos las rectas correspondientes a las ecuaciones

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad a_2x + b_2y = c_2$$

Las coordenadas del punto de intersección de esas rectas serán la solución del sistema.

El sistema será *determinado,* es decir, tendrá sólo una solución, si las rectas no son paralelas, ni se confunden. En efecto: dos rectas que no sean paralelas pueden tener solamente un punto de intersección.

Pero si las rectas no se cortan, es decir, son paralelas, el sistema *no tendrá solución.* Tal sucede con el sistema representado en la figura 96.

Finalmente, el sistema admite infinitas soluciones, o sea, es *indeterminado,* si ambas ecuaciones representan la misma recta. Así ocurre con el sistema de la figura 97.

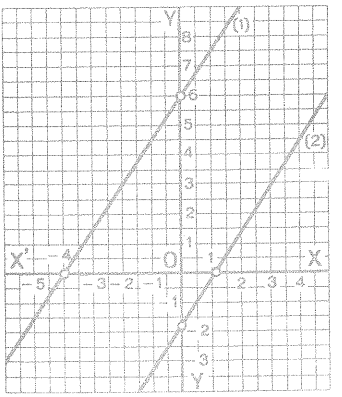


FIG. 96 $\begin{cases} 3x-2y=-12 & [1] \\ 6x-4y=8 & [2] \end{cases}$

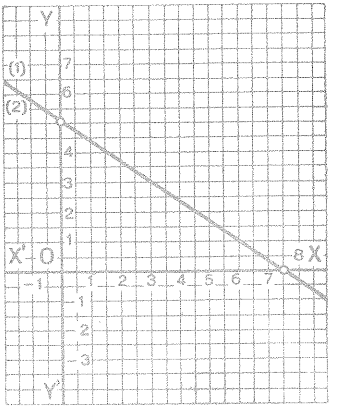


FIG. 97 $\begin{cases} 2x+3y=15 & [1] \\ 4x+6y=30 & [2] \end{cases}$

157. Aplicación a algunos problemas sencillos. — La resolución gráfica de sistemas de ecuaciones nos puede servir para resolver, o comprobar, aquellos problemas que se plantean mediante un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Veamos algunos casos sencillos:

EJEMPLO 1.° *El perímetro de un triángulo isósceles es* 16 *dm., y la altura* 4 *dm. Averiguar los lados de dicho triángulo.*

1) *Solución algebraica.* La altura correspondiente al lado desigual es a la vez mediatriz. Por consiguiente, si designamos por x a uno de los lados iguales y por y a la mitad del lado desigual, podemos escribir:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases}$$

Como $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ y $x + y = 8$, el sistema anterior es equivalente a este otro, que es de primer grado con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 8 \\ 8(x-y) = 16 \end{array}\right\} \quad \text{de donde} \quad x = 5, \quad y = 3$$

Luego, cada uno de los lados iguales mide 5 dm., y el lado desigual, $3 \times 2 = 6$.

2) *Solución gráfica.* La representación gráfica del sistema

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 8 \\ 8(x-y) = 16 \end{array}\right\} \quad \text{o su equivalente} \quad \left\{\begin{array}{l} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{array}\right.$$

nos da las rectas [1] y [2] de la figura 98, las cuales se cortan en el punto $M(5, 3)$. Como se ve, las coordenadas de este punto conducen al mismo resultado hallado antes algebraicamente.

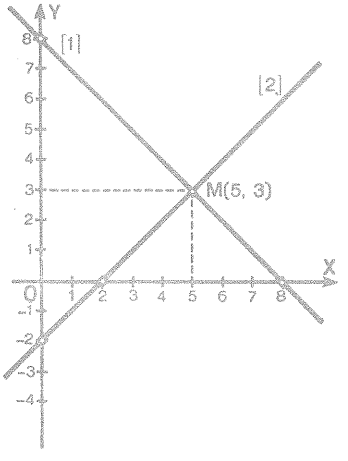


FIG. 98

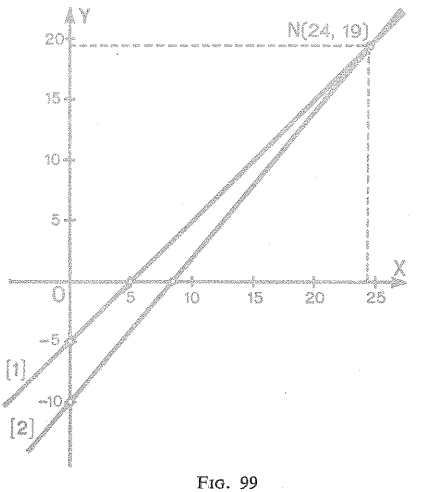


FIG. 99

EJEMPLO 2.º *Calcular las dimensiones de un rectángulo, sabiendo que si se disminuye la longitud en 5 m. y la anchura se aumenta también en 5 m., el área no varía, mientras que si la longitud se disminuye en 4 m. y la anchura se aumenta en 5 m., el área aumenta en 24 m².*

1) *Solución analítica.* Llamando x a la longitud e y a la anchura, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} (x-5)(y+5) = xy \\ (x-4)(y+5) = xy + 24 \end{array}\right\} \quad \text{o bien} \quad \left\{\begin{array}{l} 5x - 5y = 25 \\ 5x - 4y = 44 \end{array}\right.$$

Resolviendo este sistema, obtenemos $x = 24$ e $y = 19$. Luego, la longitud del rectángulo es igual a 24 m., y la anchura, 19 m.

2) *Solución gráfica.* Al representar gráficamente las ecuaciones del sistema que ha servido para plantear el problema, se obtienen las rectas [1] y [2] de la figura 99, las cuales se cortan en el punto N de coordenadas $x = 24$ e $y = 19$. Como se ve, este resultado está de acuerdo con el hallado anteriormente.

EJEMPLO 3.° *Dos peatones parten al mismo tiempo, el primero del pueblo* A *y el segundo del pueblo* B, *distantes* 27 *Km. Suponiendo que los dos caminan por la misma carretera, ambos se encontrarán al cabo de* 3 *horas si van en sentido contrario, y si lo hacen en el mismo sentido, el primero dará alcance al segundo al cabo de* 9 *horas. ¿Cuáles son las velocidades con que caminan dichos peatones?*

1) *Solución algebraica.* Sean x e y las velocidades respectivas. En el primer caso, se verificará que $3x + 3y = 27$, y en el segundo, $9x - 9y = 27$. Se tiene, por tanto, el sistema

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 3y = 27 \\ 9x - 9y = 27 \end{array}\right\} \text{ que, resuelto, da } \quad x = 6, \quad y = 3$$

Luego, el primer peatón recorre 6 Km./h., y el segundo 3 Km./h.

2) *Solución gráfica.* Resolviendo gráficamente el sistema anterior, obtenemos las rectas [1] y [2] de la figura 100, las cuales se cortan en el

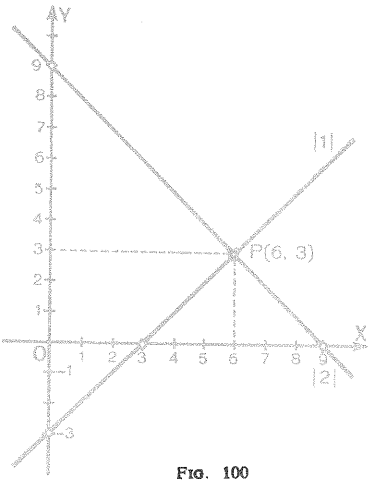


FIG. 100

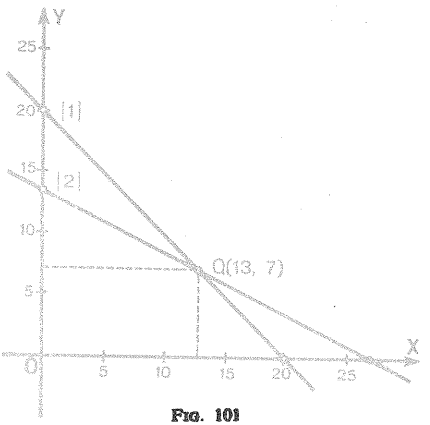


FIG. 101

punto P, de coordenadas $x = 6$ e $y = 3$. Estos valores, que como se ve coinciden con los hallados anteriormente, serán la solución del problema.

EJEMPLO 4.° *En una casa tienen gallinas y conejos; en total* 20 *cabezas y* 54 *patas. ¿Cuántos animales hay de cada clase?*

1) *Solución algebraica.* Designando por x los animales de 2 patas y por y los de 4 patas, tendremos:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 20 \\ 2x + 4y &= 54 \end{aligned}\right\} \text{ de donde } \quad x = 13, \quad y = 7.$$

2) *Solución gráfica.* Representando gráficamente las ecuaciones que componen el sistema anterior, se obtienen las rectas [1] y [2] de la figura 101, las cuales se cortan en el punto Q de ordenadas $x = 13$ e $y = 7$. En la referida casa hay, pues, 13 gallinas y 7 conejos.

158. Resolución gráfica de algunos problemas elementales de móviles. — *Decimos que un móvil se mueve con* MOVIMIENTO UNIFORME, *cuando el espacio recorrido es proporcional al tiempo empleado en recorrerlo. Velocidad de un móvil es el espacio recorrido en la unidad de tiempo.*

Sea un punto M (figura 102) que se desplaza sobre un eje, en el sentido positivo, a la velocidad de 5 unidades por segundo. Esto significa que en un segundo la abscisa del punto M crece en $+5$, y en t segundos, $5t$. Si en el instante $t = 0$, dicha abscisa es igual a $+3$, en el tiempo t será

$$x = 3 + 5t$$

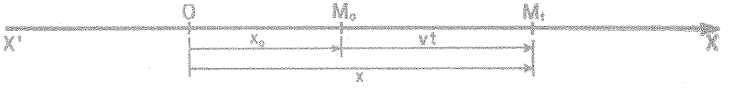


FIG. 102

En general, si la velocidad es v y la abscisa en el tiempo $t = 0$ es x_0, la abscisa en el tiempo t será

$$x = x_0 + vt$$

Esta fórmula indica que *la abscisa* x *es una función lineal del tiempo y, por consiguiente, que todo movimiento uniforme está representado gráficamente por una recta.*

Por esta razón se utilizan muy frecuentemente las gráficas en los problemas de movimiento uniforme. A continuación veremos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1.° *Dos trenes correos salen a las* 8 *de las estaciones* A *y* B, *respectivamente, yendo ambos en la misma dirección. La velocidad del primero es de* 40 *Km./h., y la del segundo,* 30 *Km./h. Hallar a qué hora y a qué distancia de* A *se encontrarán, sabiendo que la estación* B *se encuentra a* 15 *Km. de* A, *siguiendo la dirección del movimiento.*

1) *Solución algebraica.* Sea x la hora en que tiene lugar el encuentro e y la distancia de A al lugar de dicho encuentro.

De las 8 a la hora x, el primer correo habrá recorrido $40(x-8)$ Km. O sea:

$$y = 40(x-8) \qquad [1]$$

De las 8 a la hora x, el segundo correo habrá recorrido $30(x-8)$ Km., y al verificarse el encuentro se encontrará de A a la distancia

$$y = 30(x-8) + 15 \qquad [2]$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones [1] y [2], se obtiene

$$x = \frac{95}{10} \text{ h.} = 9 \text{ h. } 30 \text{ m.}; \qquad y = 60 \text{ Km.}$$

2) *Solución gráfica.* Graduemos el eje de abscisas en horas, comenzando en las 8, y el eje de ordenadas en kilómetros (fig. 103).

La trayectoria del primer correo está representada por la recta AP, definida por los puntos A (8 h., 0 Km.) y A' (9 h., 40 Km.); la del segundo, por la recta BP, definida por los puntos B (8 h., 15 Km.) y B' (9 h., $45 = 15 + 30$ Km.).

Las coordenadas del punto P, intersección de AA' y BB', serán la solución del problema: 9 h. 30 m. y 60 Km. de A.

EJEMPLO 2.° *Dos ciudades* A *y* B *distan* 90 *Km. A las* 6 *sale de* A *un ciclista y se dirige hacia* B, *llevando una velocidad de* 30 *Km./h. A las* 7 *parte de* B *un automóvil, dirigiéndose hacia* A *con la velocidad de* 60 *Km./h.*

Averiguar a qué hora y a qué distancia de A *se verificará el encuentro.*

1) *Solución algebraica.* Designemos por x la hora en que tiene lugar el encuentro, y sea y la distancia de A al lugar de dicho encuentro.

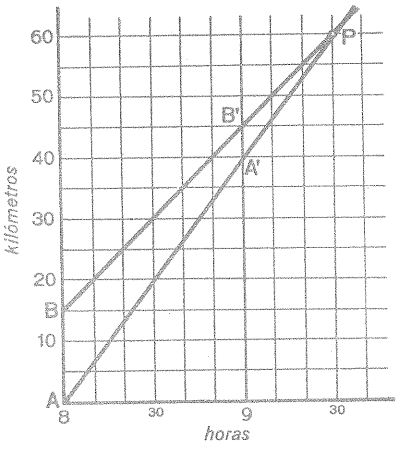


FIG. 103

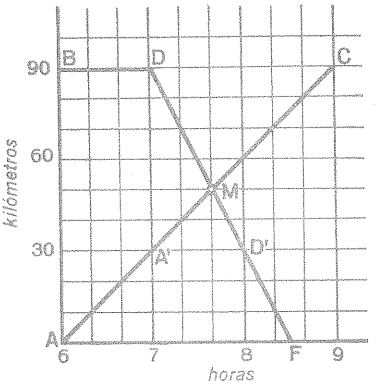


FIG. 104

De las 6 a la hora x, el ciclista habrá recorrido $30(x-6)$ Km. Es decir:

$$y = 30(x-6) \qquad [1]$$

De las 7 a la hora x, el automóvil habrá recorrido $60(x-7)$ Km., y en el momento de verificarse el encuentro se encontrará de A a la distancia

$$y = 90 - 60(x-7) \qquad [2]$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones [1] y [2], se obtiene

$$x = \frac{23}{3} \text{ h.} = 7 \text{ h. } 40 \text{ m.}; \qquad y = 50 \text{ Km.}$$

2) *Solución gráfica.* Graduemos el eje de abscisas en horas, comenzando en las 6, y el eje de ordenadas en kilómetros (fig. 104).

El diagrama correspondiente al ciclista es la recta AC, definida por los puntos A (6 h., 0 Km.) y A' (7 h., 30 Km.); la correspondiente al automóvil es la recta DF, definida por los puntos D (7 h., 90 Km.) y D' (8 h., 30 Km.).

Las coordenadas del punto M, intersección de AC y DF, serán la solución del problema: 7 h., 40 m. y 50 Km. de A.

EJEMPLO 3.° — *A las* 9 *de la mañana sale un ciclista de la ciudad* A *hacia la ciudad* B, *distante* 60 *Km. Su velocidad es de* 20 *Km./h., pero se para* 40 *minutos en la mitad del recorrido. A las* 9 *h.* 40 *m. sale de* B

un automóvil, el cual llega a A *una hora después y regresa a las* 11, *para estar de vuelta en* B *a las* 12. *Determinar la hora y la situación de cada uno de los encuentros del ciclista y del automóvil.*

Operemos gráficamente (fig. 105). El diagrama que corresponde al ciclista es la línea quebrada *ACDE*. En efecto: el segmento *AC* está determinado por los puntos (9 h., 0 Km.) y (10 h., 20 Km.); el segmento *CD* corresponde a la parada de 20 minutos que hizo en la mitad del recorrido, y el segmento *DE* está determinado por los puntos (11 h. 10 m., 30 Km.) y (12 h. 10 m., 50 Km.).

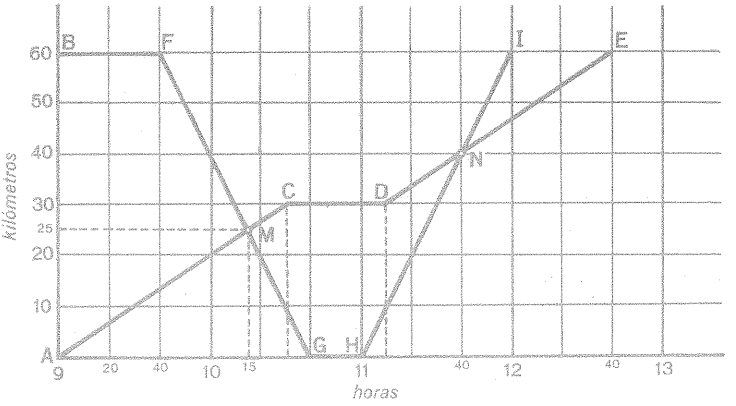


FIG. 105

El diagrama correspondiente al automóvil es la quebrada *FGHI*. El segmento *FG* representa el trayecto de ida, de las 9 h. 40 m. a las 10 h. 40 m.; el segmento *GH*, la parada en *A*, y el segmento *HI* representa el regreso a *B*, de las 11 a las 12.

Como se ve, el automóvil y el ciclista se cruzan a las 10 h. 15 m. y a 25 Km. de *A* (coordenadas de *M*), y el automóvil da alcance al ciclista a las 11 h. 40 m. y a 40 Km. de *A* (coordenadas de *N*).

Operando como en el ejemplo anterior, se pueden comprobar estas respuestas por medio del cálculo.

EJERCICIOS

Resolver gráficamente los sistemas siguientes:

901. $x - y = 4$, $x + y = 8$

902. $x + y = 6$, $x - y = 8$

903. $x = 2y$, $3x - y = 10$

904. $x - 2y = -6$, $3x + y = -4$

905. $x + y = 5$, $2x + 3y = 12$

906. $2x + y = 8$, $x + 2y = 13$

907. $3x - 2y = 18$, $4y - 6x = 12$

908. $3x - 5y = 13$, $2x + 3y = -4$

909. $3x + 5y = 9$, $2y - 3x = 12$

910. $2x + 3y = 6$, $x + 1'5y = 3$

911. $y - x = 2$, $x - y + 11 = 0$

912. $3x - 2y = 12$, $4x + 5y = -7$

Resolver gráficamente los problemas siguientes:

913. Hallar un número cuyas dos cifras suman 11, sabiendo que si se escribe invirtiendo el orden de sus cifras, el número disminuye en 63.

914. Un número de dos cifras es igual al triplo de la suma de dichas cifras, más 3. Si se invierte el orden de sus cifras, el número que resulta vale el séptuplo de la suma de sus cifras, más 9. ¿Cuál es el número dado?

915. Un buque navega a razón de 20 Km. por hora en un río, cuando lleva la dirección de la corriente. Si va en dirección contraria a la corriente, recorre 12 Km./h. Hallar la velocidad del río y la del buque en agua tranquila.

916. Las edades de dos niños suman 16 años. Dentro de un año, la edad del uno será doble de la del otro. ¿Cuáles son sus edades?

917. Hallar dos números tales que, si se divide al primero por 5 y al segundo por 4, la suma de los cocientes es 6; y que, si se multiplica al primero por 3 y al segundo por 2, la suma de los productos es 69.

918. La suma de dos números es 21. Si de 8 veces el primero, más el segundo, se resta 8 veces el segundo, más el primero, la diferencia es 63. ¿Cuáles son esos números?

919. La suma de las edades de un padre y de su hijo es de 42 años. Dentro de 9 años la edad del padre será 3 veces la del hijo. ¿Qué edad tienen ahora el padre y el hijo?

920. Se tienen dos clases de billetes. Cinco billetes de la primera clase y 20 de la segunda suman 300 ptas.; cuatro billetes de la primera y cuatro de la segunda suman 120 ptas. ¿Cuál es el valor de un billete de cada clase?

921. Dos personas han hecho una apuesta de 20 ptas. Si gana la primera, tendrá, después de cobrar las 20 ptas., el triple de dinero que la segunda. En el caso contrario, las dos tendrán igual. ¿Cuánto tiene cada una?

922. Hallar un número de dos cifras, sabiendo que la cifra de las decenas es doble de la cifra de las unidades, y que, si se invierte el orden, el número disminuye en 18.

923. Un número está formado por dos cifras cuya suma es 9. Si se invierte el orden de colocación de las cifras, resulta otro número que es igual a 9, aumentado en 4 veces el número primero. ¿De qué número se trata?

924. Tenemos dos números. Al mayor le falta 1 para ser igual a 6 veces el menor. Si del mayor se restan 2, y la diferencia se divide por el menor, se obtiene 5 de cociente. Hallar los números.

925. Antonio dice a José: «Yo tengo dos veces la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes. Cuando tú tengas la edad que yo tengo ahora, la suma de las dos edades será 63». ¿Qué edad tienen Antonio y José?

926. Al mezclar dos líquidos, se obtiene un volumen de 5 litros, cuya densidad es 0'85. Averiguar el volumen de cada uno de los líquidos que se han mezclado, sabiendo que sus densidades son 0'7 y 1'2, respectivamente.

927. La densidad de la leche pura es 1'03. Se sabe que la leche de un depósito que tiene 8 litros pesa 8'150 Kg. ¿Qué cantidad de agua tiene?

Resolver gráficamente los siguientes problemas de móviles.

928. A las 4 de la mañana sale un regimiento en ejercicio de marcha hacia un determinado lugar. Camina a razón de 5 Km./h., concediéndosele 10 minutos de descanso después de cada hora de marcha, exceptuando uno de los descansos que fue de una hora. Suponiendo que llegó a su destino a las 12 menos 20, trácese el diagrama del recorrido.

929. Un ciclista sale de una ciudad A a las 8 de la mañana, rodando a la velocidad de 24 Km./h. durante 1 h. 20 m. Se para 10 minutos y reemprende la marcha a razón de 20 Km./h. 1.° Representar gráficamente el recorrido del ciclista. 2.° ¿A qué hora llegará a la ciudad B, distante 57 Km. de A?

930. A las 8 de la mañana sale un tren de una estación, desarrollando en el recorrido la velocidad media de 30 Km./h. De la misma estación sale otro tren a las 12, adelantando a razón de 45 Km./h. durante 1 h. 40 m., y luego a razón de 60 Km./h. 1.° Trazar el diagrama de los dos trenes. 2.° ¿Qué hora será cuando al segundo tren le falten 20 Km. para dar alcance al primero?

931. La distancia entre dos ciudades A y B es de 120 Km. Un ciclista sale de A hacia B a las 8, yendo a la velocidad de 30 Km./h. Le sigue un camión que sale de A a las 9 y que va a 45 Km./h., y luego un automóvil que parte de A a las 9 h. 20 m., yendo a 90 Km./h. 1.° Trazar el diagrama de los tres móviles. 2.° ¿Cuáles son las horas de llegada a B, y a qué hora y a qué distancia de A el ciclista es adelantado por uno de los otros dos móviles?

932. Dos ciclistas salen al mismo tiempo de una población M, dirigiéndose a otra población N; el primero lleva una velocidad de 18 Km./h. y el segundo de 15 Km./h. A los 12 Km. de M, el primer ciclista ha de volver al punto de partida, permaneciendo en M 20 minutos. Luego vuelve a emprender la marcha, llegando a N al mismo tiempo que el segundo, que había descansado 40 minutos durante el viaje. Dígase la distancia MN y el tiempo transcurrido entre la primera salida de los dos ciclistas de M y su llegada a N.

933. Un automovilista sale a las 13 para efectuar un recorrido de 230 Km. Primero va a 90 Km./h. y luego a 60 Km./h., llegando a su destino a las 16. Hallar gráficamente la distancia que recorrió a 90 Km./h.

934. Un ciclista sale en ejercicio de entrenamiento a las 8 h. 20 m. y quiere estar de vuelta a las 12. A la ida su velocidad es de 36 Km./h. y al regreso de 30 Km./h. ¿A qué distancia del punto de partida deberá emprender el regreso?

935. Tres ciclistas salen al mismo tiempo de tres ciudades, *A*, *B* y *C* situadas a lo largo de la misma carretera; *B* dista de *A* 20 Km. y *C* de *B* 30 Km. El ciclista que parte de *A* marcha a 30 Km./h., el que sale de *B* va a 15 Km./h., y el que lo hace de *C* a 20 Km./h. Los tres van en el mismo sentido. ¿A qué hora y a qué distancia de *A* el ciclista que partió de esta población se encontrará exactamente a mitad de la distancia que entonces separe a los otros dos ciclistas?

936. Dos ciudades *A* y *B* se encuentran a 100 Km. de distancia una de otra. A las 9 sale de *A* un automóvil y llega a *B* a las 10 h. 15 m., para allí 20 minutos y regresa con la misma velocidad que a la ida. A las 9 h. y 20 m. sale de *B* con dirección a *A* un ciclista, llevando la velocidad de 30 Km./h. Estudiar gráficamente el lugar y la hora en que tienen lugar los encuentros del automóvil y el ciclista.

937. Un peatón que anda a razón de 6 Km./h. se traslada de *A* a *B*. Después de haber andado 2 Km. le alcanza un tranvía salido del mismo punto 10 minutos más tarde. Dicho peatón, después de recorrer 11 $\frac{1}{3}$ Km. más, se cruza con el mismo tranvía que regresa de *B*, en donde se había parado 10 minutos. ¿Qué distancia hay de *A* a *B*?

938. Un remero recorre, en canoa, 12 Km./h. en agua tranquila. A las 14 sale para remontar un río cuya corriente tiene una velocidad de 3 Km./h. ¿Qué distancia podrá recorrer antes de emprender el regreso si quiere estar a las 16 en el punto de partida?

939. Trazar los diagramas correspondientes a los siguientes trenes que ponen en comunicación las localidades *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* y *G*, en los dos sentidos *A* — *G* y *G* — *A*, entre las 8 y las 12:

Distancias Km.	ESTACIONES	CORREO	RÁPIDO	EXPRESO	ESTACIONES	EXPRESO	CORREO
0	A Salida	8	8,25	10	A Llegada	9'51	11,41
8	B Llegada	8,12	↓	↓	B Salida	↑	11,30
	B Salida	8,17			B Llegada		11,22
26	C Llegada	8,43		10,30	C Salida	9,25	11
	C Salida	8,48	↓	10,34	C Llegada	9,20	10.51
50	D Llegada	9.24	9,4	11,2	D Salida	8,56	10,20
	D Salida	9,29	9,9	11,5	D Llegada	8,51	10,15
61	E Llegada	9,45	↓	↓	E Salida	↑	10
	E Salida	9,50			E Llegada		9,55
74	F Llegada	10,9		11,33	F Salida	8,28	9,38
	F Salida	10,14	↓	11,37	F Llegada	8,22	9,33
84	G Llegada	10,27	9,35	11,48	G Salida	8,12	9,20

22. Razones goniométricas

159. Propiedad fundamental. — Consideremos un ángulo agudo XOZ cuya medida en grados representamos por α (figura 106). Sea M un punto cualquiera de OZ y P su proyección sobre OX. Los triángulos OPM, $OP'M'$, $OP''M''$, etc., obtenidos cuando el punto M toma las posiciones M', M'', etc., sobre la semirrecta OZ, son semejantes, y por consiguiente, tendremos:

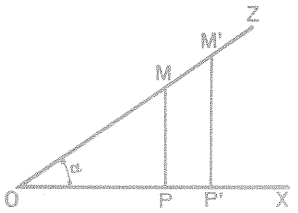


FIG 106

$$\left.\begin{array}{l}\triangle\ OPM \\ \triangle\ OP'M'\end{array}\right\} \quad \frac{OP}{OP'} = \frac{PM}{P'M'} = \frac{OM}{OM'}$$

De aquí se deducen las tres proporciones siguientes:

$$\frac{PM}{OM} = \frac{P'M'}{OM'}; \qquad \frac{OP}{OM} = \frac{OP'}{OM'}; \qquad \frac{PM}{OP} = \frac{P'M'}{OP'}$$

Vemos, por tanto, que el valor de la razón de dos lados del triángulo OPM, es independiente de la posición del punto M.

Recíprocamente, si conociéramos el valor de una de estas razones, podríamos construir un triángulo $OP'M'$ y como consecuencia el ángulo α.

En resumen: *El valor de cada una de las razones*

$$\frac{PM}{OM} \qquad \frac{OP}{OM} \qquad \text{y} \qquad \frac{PM}{OP}$$

es independiente de la posición que ocupa el punto M, *y se denominan, respectivamente, seno, coseno y tangente del ángulo agudo* α.

(*) Del griego, *gonía* = ángulo.

Abreviadamente se escriben así (leer «seno α, coseno α, tangente α»):

$\text{sen } \alpha = \frac{PM}{OM}$	$\cos \alpha = \frac{OP}{OM}$	$\text{tg } \alpha = \frac{PM}{OP}$

Podríamos considerar también las recíprocas de estas tres razones, pero en la práctica no se utiliza sino la recíproca de tg α, denominada *cotangente del ángulo* α.

$$\text{cotg } \alpha = \frac{OP}{PM} = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$$

Sen α, *cos* α, *tg* α *y cotg* α *constituyen las razones goniométricas o trigonométricas del ángulo* α.

160. Definiciones. — En un triángulo rectángulo:

Seno de un ángulo agudo C, es el cociente entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa.

Coseno es el cociente entre el cateto contiguo y la hipotenusa.

Tangente es el cociente entre el cateto opuesto y el contiguo.

Cotangente es el cociente entre el cateto contiguo y el opuesto, o bien cotangente es el inverso de la tangente.

Así, en la figura 107:

$$\text{sen } C = \frac{c}{a}; \qquad \cos C = \frac{b}{a};$$

$$\text{tg } C = \frac{c}{b}; \qquad \text{cotg } C = \frac{b}{c}$$

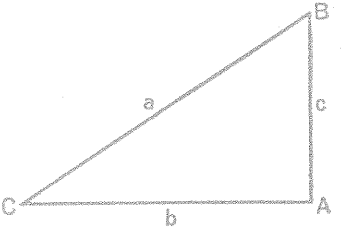


FIG. 107

161. Interpretación geométrica. — Designemos por A y M las intersecciones de OX y OZ con la circunferencia O, de radio igual a 1 (figura 108), y por T la intersección de la tangente en A con el lado OZ. De aquí se deduce, puesto que $OA = OM = 1$:

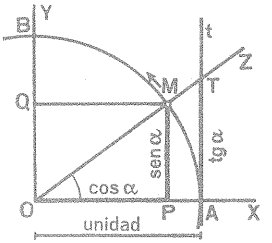


FIG. 108

$$\text{sen } \alpha = \frac{PM}{OM} = \frac{PM}{1}$$

$$\cos \alpha = \frac{OP}{OM} = \frac{OP}{1}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{PM}{OP} = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1}$$

Resulta, por tanto, que

$\text{sen } \alpha = PM$	$\cos \alpha = OP$	$\text{tg } \alpha = AT$

Observemos que el arco AM, interceptado por los lados del ángulo XOZ, tiene por medida α. De ahí que se hable indistintamente de razones goniométricas de un ángulo o de un arco. Por otra parte, si designamos por Q la proyección de M sobre OY (perpendicular a OX), tendremos que, también, $\text{sen } \alpha = OQ$.

ADVERTENCIA. — Al hablar de la interpretación geométrica de las razones goniométricas de un ángulo, es necesario evitar el suponer que sen α, cos α, tg α son segmentos. Por el contrario, en la fórmula $\text{sen } \alpha = PM$, por ejemplo, PM representa la medida del segmento PM, es decir, *el valor de la razón del segmento* PM *al segmento unidad* OA *o a su igual* OM.

162. Variación de las razones goniométricas. — Si α varía de 0° a 90° (figura 109), el punto M describe el cuadrante AB. Al mismo tiempo:

1.° El punto Q recorre el segmento OB; luego, sen α crece de 0 a +1.

2.° El punto P recorre el segmento AO; luego, cos α decrece de +1 a 0.

3.° El punto T recorre la semirrecta At; luego, tg α crece de 0 a $+\infty$ (infinito) (*), y su recíproca cotg α decrece de $+\infty$ a 0.

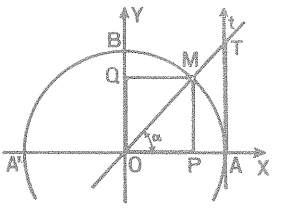


FIG. 109

Nótese, por tanto, que el seno y el coseno están comprendidos entre 0 *y* 1, *mientras que la tangente y la cotangente oscilan entre* 0 *e* infinito.

163. Relaciones entre las razones goniométricas de un mismo ángulo. — Las razones goniométricas de un ángulo C están ligadas por las tres *relaciones fundamentales siguientes:*

$\operatorname{sen}^2 C + \cos^2 C = 1$	$\operatorname{tg} C = \dfrac{\operatorname{sen} C}{\cos C}$	$\operatorname{cotg} C = \dfrac{\cos C}{\operatorname{sen} C}$

En efecto: 1) Consideremos el triángulo ABC (fig. 107). Aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Dividiendo los dos miembros de esta igualdad por a^2, nos da:

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1 \quad \text{o bien} \quad \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1$$

Pero

$$\left(\frac{c}{a}\right)^2 = (\operatorname{sen} C)^2 \quad \text{y} \quad \left(\frac{b}{a}\right)^2 = (\cos C)^2$$

es decir, que

$$(\operatorname{sen} C)^2 + (\cos C)^2 = 1 \quad \text{o bien} \quad \operatorname{sen}^2 C + \cos^2 C = 1$$

(*) El signo ∞ se emplea en Matemáticas para expresar una cantidad que puede ser tan grande como se quiera.

2) Según vimos en el número 160 (fig. 107),

$$\text{tg } C = \frac{c}{b} \quad \text{o bien} \quad \text{tg } C = \frac{c:a}{b:a}$$

Pero $\frac{c}{a} = \text{sen } C$ y $\frac{b}{a} = \cos C$

Luego:

$$\text{tg } C = \frac{\text{sen } C}{\cos C}$$

3) Si por definición es

$$\text{cotg } C = \frac{1}{\text{tg } C} \quad \text{y} \quad \text{tg } C = \frac{\text{sen } C}{\cos C} \quad \text{será} \quad \text{cotg } C = \frac{\cos C}{\text{sen } C}$$

164. Cálculo de las razones goniométricas de un ángulo, conocida una de ellas.— Las relaciones fundamentales antes deducidas:

$$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\ \alpha = 1 \quad [1]; \qquad \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos\ \alpha} \quad [2]; \qquad \text{cotg } \alpha = \frac{\cos\ \alpha}{\text{sen } \alpha} \quad [3]$$

nos permiten calcular las razones goniométricas de un ángulo cuando se conoce una de ellas.

I. CONOCIENDO EL SENO. — Sea sen $\alpha = m$.

El *coseno* lo deducimos despejando cos α de la fórmula [1]:

$$\cos^2\ \alpha = 1 - \text{sen}^2\ \alpha; \qquad \cos\ \alpha = \sqrt{1-\text{sen}^2\ \alpha}; \qquad \cos\ \alpha = \sqrt{1-m^2}$$

La *tangente* se obtiene de la fórmula [2]:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos\ \alpha} = \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$$

La *cotangente* es recíproca de la tangente, o sea, según [3]:

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\cos\ \alpha}{\text{sen } \alpha} = \frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$$

EJEMPLO. — Sabiendo que sen $\alpha = \frac{3}{5}$, hallar las restantes razones del ángulo α.

Tendremos:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}; \qquad \text{tg } \alpha = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4}; \qquad \text{cotg } \alpha = \frac{4}{3}$$

II. CONOCIENDO EL COSENO. — Supongamos que $\cos \alpha = n$.

Por un razonamiento análogo al anterior, obtendríamos:

$$\text{sen } \alpha = \sqrt{1-n^2}; \qquad \text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{1-n^2}}{n}; \qquad \text{cotg } \alpha = \frac{n}{\sqrt{1-n^2}}$$

EJEMPLO. — Dado $\cos 60° = \frac{1}{2}$, hallar sen 60°, tg 60° y cotg 60°.

Tendremos:

$$\text{sen } 60° = \sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{tg } 60° = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}; \quad \text{cotg } 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

III. CONOCIENDO LA TANGENTE. — Sea $\text{tg } \alpha = p$.

La *cotangente* será igual a $\frac{1}{p}$

Para deducir el *coseno*, razonamos así: Dividiendo a los dos miembros de la igualdad [1] por $\cos^2 \alpha$, resulta

$$\frac{\text{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{o sea,} \quad \text{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

de donde,

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 \alpha} \qquad \text{y} \qquad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$$

Obtenido el coseno, es fácil calcular el *seno*. En efecto:

$$\text{De } \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \text{ se deduce } \text{sen } \alpha = \text{tg } \alpha \times \cos \alpha = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

EJEMPLO. — Sabiendo que tg 45° = 1, calcular las restantes razones goniométricas.

Tendremos:

$$\text{cotg } 45° = 1; \qquad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

IV. CONOCIENDO LA COTANGENTE. — Este problema se reduce al anterior, ya que, tomando el número inverso del valor dado, conoceremos la tangente del ángulo.

165. Razones goniométricas de ángulos complementarios. — *Si dos ángulos son complementarios:*

1.° El seno de uno es igual al coseno del otro.

2.° La tangente de uno es igual a la cotangente del otro.

En efecto: Ya sabemos que en un triángulo rectángulo (fig. 110) los ángulos agudos son complementarios, es decir que

$$B = 90° - C$$

Teniendo en cuenta esta igualdad y las definiciones de las razones goniométricas (núm. 160), podemos escribir las relaciones siguientes:

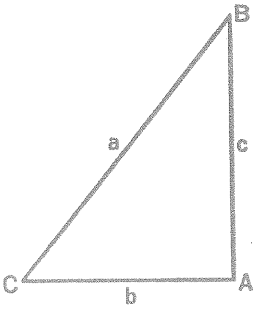


FIG. 110

$$\operatorname{sen} C = \frac{c}{a} = \cos B = \cos (90° - C)$$

$$\cos C = \frac{b}{a} = \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} (90° - C)$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{c}{b} = \operatorname{cotg} B = \operatorname{cotg} (90° - C)$$

166. Descripción y manejo de las tablas trigonométricas naturales. — Para hacer uso de las aplicaciones que vamos a deducir de cuanto llevamos dicho en esta lección, se necesita poder hallar las razones goniométricas de un ángulo cualquiera, y viceversa: conocido el valor de una razón goniométrica determinada, hemos de saber calcular el ángulo a que corresponde.

Esto se logra fácilmente mediante unos cuadros llamados *tablas trigonométricas naturales* [1], en las que aparecen calculados exactamente, o con bastante aproximación [2], los valores de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes de los ángulos comprendidos entre 0° y 90°. Según las tablas, estos ángulos se suceden de grado en grado, de 10 en 10 minutos, de minuto en minuto, etc. En las tablas a que nos vamos a referir nosotros, supondremos que los valores de las razones figuran con cinco cifras decimales, y que los ángulos se suceden de minuto en minuto.

Como las razones de un ángulo se relacionan con las de su complementario de modo que el seno de uno es igual al coseno del otro, y la tangente de uno tiene el mismo valor que la cotangente del otro, al construir unas tablas trigonométricas y llegar a las razones de un ángulo mayor que 45°, los valores obtenidos para dichas razones figurarán ya en las tablas. Por eso, se suele evitar el dar a las tablas demasiada extensión, abriendo un encabezamiento en la parte inferior de sus páginas para los ángulos comprendidos entre 45° y 90°. Las tablas dispuestas de ese modo, se leen de arriba abajo para los ángulos inferiores a 45°, y de abajo arriba para los ángulos superiores de 45°.

Teóricamente, para construir unas tablas trigonométricas, bastaría considerar un ángulo *AOB* con un lado, *OA*, fijo (fig. 111). Haciendo tomar al otro, *OB*, las posiciones correspondientes a los distintos grados y minutos del cuadrante, y midiendo los segmentos que sirven para definir las razones goniométricas (159), hallaríamos luego los diversos valores. En la práctica, empléanse en la construcción de tablas trigonométricas, procedimientos mucho más cómodos y exactos que el anterior, pero cuyo fundamento está basado en conocimientos de Matemáticas superiores.

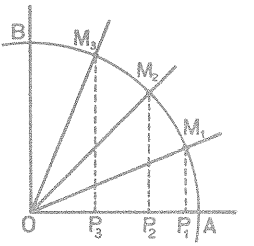


FIG. 111

Los dos problemas que pueden presentarse en el *manejo* de las tablas trigonométricas naturales, son los siguientes:

(1) Este adjetivo *naturales* sirve para diferenciarlas de otras, llamadas *tablas logaritmo-trigonométricas*, en las que se da el logaritmo de las razones en vez de su valor natural.

(2) Según se deduce de la definición, las razones goniométricas son números abstractos, y, en general, no pueden expresarse por una fracción decimal exacta. En las tablas aparecen expresadas por números decimales, con más o menos cifras decimales; cuanto mayor sea el número de éstas, mayor será la exactitud obtenida en los cálculos que con su auxilio se realicen.

I. PROBLEMA DIRECTO:

Dado un ángulo, hallar el valor de sus razones goniométricas.

PRIMER CASO: *El ángulo está comprendido exactamente en las tablas, o sea, consta solamente de grados y minutos.*

Si el ángulo es inferior a 45°, se buscarán los grados en la parte superior de las páginas y los minutos en la primera columna de la izquierda, que crece de arriba abajo; hecho esto, en la horizontal a que hayamos llegado, estará el valor de la razón goniométrica que se busca.

EJEMPLOS:

sen 40° 27′ = 0'64878; cos 40° 33′ = 0'75984
tg 40° 41′ = 0'85963; cotg 40° 57′ = 1'15240

Si el ángulo es superior a 45°, se buscarán los grados en la parte inferior de las páginas y los minutos en la primera columna de la derecha, que crece de abajo arriba; en la horizontal a que hayamos llegado, se encontrará el valor de la razón que se pide.

EJEMPLOS:

sen 48° 28′ = 0'74857; cos 48° 51′ = 0'65803
tg 48° 7′ = 1'11517; cotg 48° 15′ = 0'89253

SEGUNDO CASO: *El ángulo no está comprendido exactamente en las tablas, es decir, consta de grados, minutos y segundos.*

En este caso el problema se resuelve por *interpolación*. Admitiendo que *las diferencias de dos ángulos son proporcionales a las diferencias de los valores de sus razones goniométricas*, podemos razonar del siguiente modo:

Si al diferenciarse dos ángulos en $1' = 60''$
los valores correspondientes de una de sus razones se diferencian en D,
al diferenciarse dos ángulos en h''
los valores correspondientes de una de sus razones se diferenciarán en d.

De donde se deduce la siguiente proporción:

$$\frac{60''}{h''} = \frac{D}{d};$$ y despejando d, resulta $$d = \frac{D \times h''}{60}$$

fórmula en la que:

h'' representa los segundos del ángulo dado;

D representa la diferencia entre dos valores consecutivos de las tablas: los correspondientes a los ángulos más próximos (superior e inferior), dados por las tablas;

d representa la *corrección* que ha de hacerse en el valor tabular de la razón correspondiente al ángulo más próximo inferior al dado.

El valor hallado para d es POSITIVO cuando la diferencia tabular D es positiva, es decir, para los *senos* y *tangentes* (son razones crecientes); y NEGATIVO cuando D es negativa, o sea, para los *cosenos* y *cotangentes* (son razones decrecientes).

EJEMPLO 1.º — Hallar sen 20° 2′ 18″.

Leemos en las tablas: sen 20° 2′ = 0'34257; sen 20° 3′ = 0'34284.
Para un crecimiento de α en 1′ = 60″, el crecimiento del seno es

D = 0'34284 − 0'34257 = 0'00027, o sea, D = 84 − 57 = 27 cienmilésimas.

Para 1″, este crecimiento sería $\frac{27}{60}$, y para 18″, la corrección d será

$$d = \frac{27 \times 18}{60} = 8'1$$

Redondeando 8'1 (para lo cual se desprecia la parte decimal, a no ser que su primera cifra sea 5 o superior a 5, en cuyo caso se añade una unidad a la parte entera), y sumando este valor (no se olvide que son cienmilésimas), a sen 20° 2′ resulta:

$$\text{sen } 20° \ 2' \ 18'' = 0'34257 + 0'00008 = 0'34265$$

EJEMPLO 2.º — Determinar tg 69° 40′ 30″.

Disposición práctica:

$$\text{tg } 69° \ 40' \ \ldots\ldots = 2'69853; \quad D = 241$$

$$\frac{\text{Para} \quad 30'', \ d = \dfrac{241 \times 30}{60} = 121}{\text{tg } 69° \ 40' \ 30'' \ \ldots\ldots = 2'69974}$$

EJEMPLO 3.º — Hallar cos 20° 37′ 20″.

$$\text{cos } 20° \ 37' \ \ldots\ldots = 0'93596; \quad D = -11$$

$$\frac{\text{Para} \quad 20'', \ d = \dfrac{(-11) \times 20}{60} = -4}{\text{cos } 20° \ 37' \ 20'' \ \ldots\ldots = 0'93592}$$

EJEMPLO 4.º — Hallar cotg 69° 25′ 15″.

$$\begin{array}{lll} \text{cotg } 69° \ 25' & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = 0'37554; \ D = -33 \\ \text{Para} \quad 15'', \ d = \dfrac{(-33) \times 15}{60} & & = \dfrac{-8}{} \\ \text{cotg } 69° \ 25' \ 15'' & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = 0'37546 \end{array}$$

II. PROBLEMA INVERSO:

Dado el valor de una razón goniométrica, determinar el ángulo a que corresponde.

PRIMER CASO: *El valor dado se encuentra exactamente en las tablas.*

Se le buscará en la columna correspondiente del mismo nombre que la razón dada, sea leyendo los títulos en la parte superior o bien haciéndolo en la inferior. Para encontrarle más rápidamente, se ha de tener presente que los senos y tangentes crecen en el intervalo 0° a 90°, mientras que los cosenos y cotangentes decrecen.

Si el nombre de la razón cuyo valor se ha buscado, corresponde al título superior de la columna, el número de grados será el que figura en la parte superior de la página, y los minutos se leerán en la columna correspondiente de la izquierda. Si, por el contrario, el valor corresponde al título inferior de la columna, el número de grados será el de la parte inferior de la página, y los minutos se encontrarán en la parte derecha.

EJEMPLOS:

Si sen $\alpha = 0'67387$, $\alpha = 42° \ 22'$; si cos $\alpha = 0'73806$, $\alpha = 42° \ 26'$
si tg $\alpha = 0'92062$, $\alpha = 42° \ 38'$; si cotg $\alpha = 1'07801$, $\alpha = 42° \ 51'$

SEGUNDO CASO: *El valor dado no se encuentra exactamente en las tablas.*

Este caso, como su correspondiente del problema directo, se resuelve por *interpolación.*

Dejamos su estudio para las clases de prácticas, dirigidas por el profesor.

EJERCICIOS

940. Dibuja ángulos cuyos respectivos senos valgan $\frac{3}{4}$, 0'7, $\frac{2}{5}$.

941. Ídem ángulos cuyos cosenos sean 0'2, 0'5, $\frac{2}{3}$.

942. Ídem ángulos cuyas tangentes valgan 0'5, 1, 2 y $\frac{5}{3}$.

943. En un triángulo rectángulo el coseno de un ángulo agudo es 0'8, ¿qué razón existe entre el cateto opuesto a dicho ángulo y la hipotenusa?

944. El seno de un ángulo agudo vale $\frac{1}{2}$, ¿cuánto vale su tangente?

945. ¿Cuánto valen el coseno y la tangente de un ángulo agudo si el seno del mismo es $\frac{5}{13}$?

946. Hallar el seno, conseno y tangente de C en los triángulos cuyos catetos tienen, respectivamente, los valores siguientes:

1.º	2.º	3.º	4.º
$b = 4$ cm	$b = 12$ cm	$b = 15$ cm	$b = 24$ mm
$c = 3$ cm	$c = 5$ cm	$c = 8$ cm	$c = 7$ mm

947. En un triángulo la hipotenusa mide 82 mm. y la tangente de un ángulo agudo vale $\frac{9}{40}$, ¿cuánto miden cada uno de los catetos?

948. El seno de un ángulo ¿puede valer $\frac{3}{7}$? ¿$\frac{3}{2}$? ¿Y 0'98? Razonar las respuestas.

949. Deducir la relación: $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

950. Hallar el seno, el coseno, la tangente y la cotangente de los ángulos siguientes: 12° 30′; 23° 15′; 59° 45′; 75° 23′.

951. Hallar el seno, el coseno, la tangente y la cotangente de los ángulos indicados a continuación: 18° 34′ 19″; 27° 12′ 32″; 72° 25′ 42″; 64° 51′ 51″.

952. Obtener los ángulos cuyos senos valen: 0'58141; 0'27256; 0'49804; 0'91549.

953. Hallar los ángulos cuyos cosenos valen: 0'40381; 0'85310; 0'90832; 0'49562.

954. Determinar los ángulos que tienen por tangentes: 0'23054; 1'72278; 2'84126; 0'11111.

955. Hallar los ángulos cuyas cotangentes valen: 1'04097; 2'06094; 0'32022; 0'66666.

956. Trazar los ángulos que se indican en la tabla adjunta y calcular sus razones goniométricas (sen, cos y tg), midiendo para ello los segmentos correspondientes:

Ángulo	sen α	cos α	tg α	Ángulo	sen α	cos α	tg α
10°				50°			
20°				60°			
30°				70°			
40°				80°			

Una vez reunidos en esta tabla todos los valores, compárense: el seno de 10° con el coseno de 80°; el seno de 20° con el coseno de 70°; etc. De esta forma se comprobará que el seno de un ángulo es igual al coseno de su complementario.

23. Resolución de triángulos rectángulos

167. Relaciones trigonométricas entre los elementos de un triángulo rectángulo. — Las razones goniométricas permiten establecer relaciones entre las medidas de ciertos ángulos y segmentos, y, en particular, entre los seis elementos (tres ángulos y tres lados) de un triángulo. Por esta razón, reciben el nombre de *razones trigonométricas* (*).

En lo que sigue, designaremos por A, B y C las medidas de los ángulos de un triángulo ABC, y por a, b y c las longitudes de los lados opuestos. Tratándose de triángulos rectángulos, la letra A designa siempre el ángulo recto.

TEOREMA. — En todo triángulo rectángulo:

I. Un cateto es igual a la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto, o por el coseno del ángulo contiguo.

II. Un cateto es igual al otro cateto multiplicado por la tangente del ángulo opuesto al primero, o por la cotangente del ángulo contiguo al primero.

Sea el triángulo rectángulo ABC (fig. 112). Prolongando BA hasta X y BC hasta Z, tenemos de nuevo la figura 106, con la sola diferencia de que las letras B, A y C sustituyen ahora a O, P y M, respectivamente. Por consiguiente:

$$\operatorname{sen} B = \frac{AC}{BC}; \qquad \cos B = \frac{AB}{BC}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB}; \qquad \operatorname{cotg} B = \frac{AB}{AC}$$

de donde:

$$AC = BC \operatorname{sen} B; \qquad AB = BC \cos B$$

$$AC = AB \operatorname{tg} B; \qquad AB = AC \operatorname{cotg} B$$

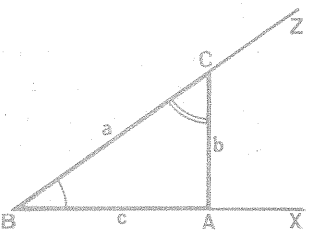


FIG. 112

(*) La palabra *trigonométrica* se deriva de *Trigonometría*, y ésta se deriva a su vez de dos voces griegas: *trigónon*, que significa triángulo, y *metría*, que significa medida.

o, más brevemente:

$$b = a \text{ sen } B; \qquad c = a \cos B; \qquad b = c \text{ tg } B; \qquad c = b \text{ cotg } B$$

Ahora bien: por ser $B + C = 90°$, se puede escribir (165):

$$\text{sen } B = \cos C; \qquad \cos B = \text{sen } C; \qquad \text{tg } B = \text{cotg } C; \qquad \text{cotg } B = \text{tg } C$$

Luego, tendremos finalmente:

$b = a \text{ sen } B = a \cos C$	$c = a \text{ sen } C = a \cos B$
$b = c \text{ tg } B = c \text{ cotg } C$	$c = b \text{ tg } C = b \text{ cotg } B$

168. Resolución de triángulos rectángulos. — *Resolver un triángulo es hallar los valores de sus elementos desconocidos, cuando se conocen los valores de los restantes.*

Un triángulo puede resolverse *gráficamente* o *analíticamente.*

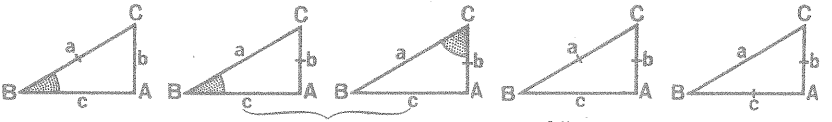
Gráficamente: construyendo el triángulo valiéndose de los elementos conocidos, y midiendo los otros sobre el dibujo con el doble decímetro y el transportador.

Analíticamente (numéricamente): calculando los elementos desconocidos por fórmulas en las que aparecen los elementos conocidos.

Del método gráfico se hace aplicación en Geometría. Ahora nos interesa emplear el método analítico o trigonométrico a la resolución de *triángulos rectángulos.*

Distinguiremos cuatro casos de resolución de triángulos rectángulos, análogos a los de construcción estudiados en Geometría, es decir, cuando los elementos conocidos son:

1.° *La hipotenusa y un ángulo agudo.*
2.° *Un cateto y un ángulo agudo.*
3.° *La hipotenusa y un cateto.*
4.° *Los dos catetos.*



Como vemos, además del ángulo recto, hace falta conocer otros dos elementos, uno de los cuales ha de ser forzosamente un lado.

Cada una de las fórmulas o relaciones trigonométricas estudiadas en el párrafo 167, contiene tres cantidades, de manera que, dadas dos de ellas, puede obtenerse la tercera.

PRIMER CASO. — *Dados la hipotenusa y un ángulo agudo.*

Datos: a y B Incógnitas: C, b y c

Fórmulas:

$$C = 90° - B \qquad b = a \text{ sen } B \qquad c = a \cos B$$

EJEMPLO. — Resolver un triángulo rectángulo en el que $a = 1.200$ m. y $B = 36°$.

Construyamos primeramente el triángulo con toda la exactitud posible, mediante escuadras, transportador y doble decímetro. De este modo se tiene de antemano idea clara de los resultados, evitando las consecuencias de un error grave por distracción (fig. 113).

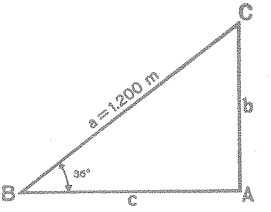


FIG. 113

Cálculo de C: $C = 90° - 36° = 54°$

Cálculo de b: $b = 1.200 \times \text{sen } 36° =$
$= 1.200 \times 0'58779 = 705'34$ m.

Cálculo de c: $c = 1.200 \times \cos 36° =$
$= 1.200 \times 0'80902 = 970'82$ m.

SEGUNDO CASO. — *Dados un cateto y un ángulo agudo.*

Datos: b y B Incógnitas: C, a y c

Fórmulas:

$$C = 90° - B \qquad a = \frac{b}{\text{sen } B} \qquad c = b \text{ cotg } B$$

La hipotenusa a la hemos obtenido partiendo de la fórmula

$$b = a \text{ sen } B$$

EJEMPLO. — Resolver un triángulo rectángulo en el que $b = 778'32$ metros y $B = 22° 5' 48''$ (fig. 114).

Cálculo de C: $C = 90° - 22' 5' 48'' =$
$= 89° 59' 60'' - 22° 5' 48'' = 67° 54' 12''$.

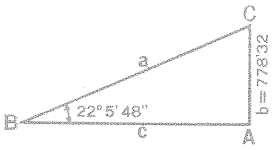


FIG. 114

Cálculo de a: $a = \dfrac{778'32}{\text{sen } 22° 5' 48''} =$

$= \dfrac{778'32}{0'37615} = 2.069'17$ m.

Cálculo de c: $c = 778'32 \text{ cotg } 22° 5' 48'' =$
$= 778'32 \times 2'46311 = 1.914'98$ m.

TERCER CASO. — *Dados la hipotenusa y un cateto.*

Datos: a y b Incógnitas: B, C y c

Fórmulas:

$$\text{sen } B = \frac{b}{a} \qquad C = 90° - B \qquad c = a \cos B$$

EJEMPLO. — Resolver un triángulo rectángulo en el que $a = 624'50$ metros y $b = 172'46$ m. (fig. 115).

Cálculo de B: $\text{sen } B = \dfrac{172'46}{624'50} = 0'27615$;

$B = 16° 1' 49''$

Cálculo de C: $C = 90° - B = 73° 58' 11''$

Cálculo de c: $c = 624'50 \times 0'96125 = 600'30$ m.

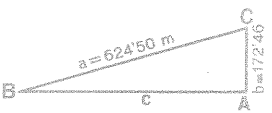


FIG 115

CUARTO CASO. — *Dados los dos catetos.*

Datos: b y c Incógnitas: B, C y a

Fórmulas:

$$\text{tg } B = \frac{b}{c} \qquad C = 90° - B \qquad a = \frac{b}{\text{sen } B}$$

El valor de a se deduce de la fórmula $b = a \text{ sen } B$.

EJEMPLO. — Resolver un triángulo rectángulo en el que $b = 194'22$ metros y $c = 489'64$ m. (figura 116).

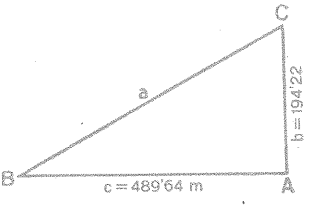


FIG. 116

Cálculo de B: $\operatorname{tg} B = \dfrac{194'22}{489'64} = 0'39666$;

$$B = 21° \ 38' \ 10''$$

Cálculo de C: $C = 90° - B = 68° \ 21' \ 50''$

Cálculo de a: $a = \dfrac{194'22}{0'36872} = 526'76$ m.

169. Resolución de triángulos isósceles. — La altura de un triángulo isósceles lo divide en dos triángulos rectángulos iguales, por lo que la resolución de triángulos isósceles se reduce a la de los triángulos rectángulos. He aquí los cuatro casos que pueden presentarse, correspondiéndose con los estudiados para los triángulos rectángulos:

1.° *Se dan un lado y un ángulo.* 3.° *Se dan un lado y la base.*
2.° *Se dan la base y un ángulo.* 4.° *Se dan la base y la altura.*

EJEMPLO. — Resolver un triángulo isósceles en el que la base mide 224'16 cm. y la altura 280'20 cm.

Sea el triángulo de la figura 117. De él conocemos la base, $b = AC = 224'16$ cm., y la altura, $h = 280'20$ cm.

La mitad de la base y la altura son los catetos del triángulo rectángulo mitad del isósceles; luego, se trata del cuarto caso de triángulos rectángulos.

Datos: b, h Incógnitas: $B, A = C, l$

Fórmulas:

$$\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}B\right) = \frac{\frac{1}{2}b}{h} \qquad A = C = \tfrac{1}{2}(180° - B) \qquad l = \frac{\frac{1}{2}b}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}B\right)}$$

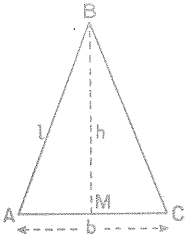


FIG. 117

Cálculo de B:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}B = \frac{112'08}{280'20} = 0'40000; \qquad \tfrac{1}{2}B = 21° \ 48' \ 5'';$$

$$B = 43° \ 36' \ 10''$$

Cálculo de A y C:

$$A = C = \tfrac{1}{2}(180° - B) = 68° \ 11' \ 55''$$

Cálculo de l:

$$l = \frac{112'08}{\operatorname{sen} 21° \ 48' \ 5''} = \frac{112'08}{0'37139} = 301'78 \text{ cm.}$$

170. Aplicación a los polígonos regulares.— Los radios y las apotemas dividen a un polígono regular en triángulos rectángulos iguales (figura 118). Por consiguiente, si conocemos los elementos de uno de dichos triángulos, el polígono quedará determinado. Ahora bien: hay que tener en cuenta que no pueden darse arbitrariamente los elementos de los triángulos, ya que, para que un triángulo rectángulo pueda formar polígonos regulares, es necesario que el ángulo en el centro sea una parte alícuota de 180°. Debido a esto, no puede caracterizarse al polígono, dando como datos: el radio y la apotema, o el radio y el lado, o el lado y la apotema. Los casos que pueden presentarse son los tres siguientes, según que los elementos conocidos sean:

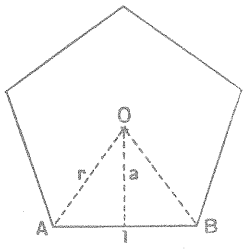


FIG. 118

1.° *El lado y el nombre del polígono.*
2.° *La apotema y el nombre del polígono.*
3.° *El radio y el nombre del polígono.*

Al conocer el nombre del polígono, deducimos el número n de lados, así como la medida del ángulo en el centro.

EJEMPLO. — Resolver un pentágono regular del que se conoce la apotema $a = 176'23$ m.

Como el ángulo en el centro O (fig. 118) es igual a $360 : 5 = 72°$, su mitad será $\frac{1}{2}O = 36°$, y, por tanto, el problema queda reducido a resolver un triángulo rectángulo del que se conoce un cateto y un ángulo agudo (2.° *caso*).

Datos: a y $\frac{1}{2}O$. Incógnitas: r y l.

Fórmulas:

De $a = r \cos 36°$, se deduce $r = \dfrac{a}{\cos 36°}$; $\qquad \frac{1}{2}l = a \operatorname{tg} 36°$

Cálculo de r: $\quad r = \dfrac{176'23}{0'80902} = 217'83$ m.

Cálculo de l: $\quad \frac{1}{2}l = 176'23 \times 0'72654 = 128'04$; $\qquad l = 256'08$ m.

171. Otras aplicaciones prácticas.— 1) *Calcular la medida del arco subtendido por una cuerda de longitud conocida, perteneciente a una circunferencia cuyo radio también se conoce.*

EJEMPLO. — Calcular la medida del arco subtendido por una cuerda de 60 cm., trazada en una circunferencia de 90 cm. de radio (fig. 119).

Trazando la perpendicular OC, se habrá formado el triángulo rectángulo AOC, en el que $OA = 90$ cm. y $AC = 30$ cm. El ángulo AOC es mitad del ángulo AOB, y el ángulo AOB tiene igual medida que el arco $A\,n\,B$.

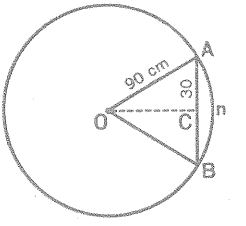


FIG. 119

Según esto, tendremos:

$$\text{sen } AOC = \frac{AC}{AO} = \frac{30}{90} = 0'33333;$$

$$\text{áng. } AOC = 19° \; 28' \; 15{,}5''$$

Luego, la medida del arco $A\,n\,B$ será

$$19° \; 28' \; 15{,}5'' \times 2 = 38° \; 56' \; 31''$$

2) *Calcular el área de un segmento circular, conociendo su amplitud y el radio del círculo a que pertenece.*

EJEMPLO. — Hallar el área de un segmento circular de 73° de amplitud, perteneciente a un círculo de 14 cm. de radio (fig. 120).

La cuerda AB mide

$$AB = 2 \times 14 \times \text{sen } 36° \; 30' = 2 \times 14 \times 0'59482 = 16'65 \text{ cm.}$$

La apotema, o distancia h del centro O a la cuerda AB, es

$$h = 14 \times \cos 36° \; 30' = 14 \times 0'80386 = 11'25 \text{ cm.}$$

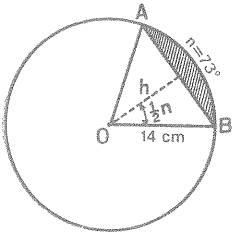


FIG. 120

Por tanto, el área del segmento circular de 73°, será

$$\text{Área} = \text{sector} - \text{triáng.} = \frac{\pi r^2 n}{360} - \frac{AB \times h}{2} =$$

$$= \frac{3'14 \times 14^2 \times 73}{360} - \frac{16'65 \times 11'25}{2} =$$

$$= 124'79 - 93'65 = 31'14 \text{ cm}^2.$$

3) *Se llama* PENDIENTE *de un camino (carretera, ferrocarril, etc.), al valor de la tangente trigonométrica del ángulo que forma dicho camino con un plano horizontal* (*).

(*) Algunos autores llaman *pendiente* al seno de dicho ángulo.

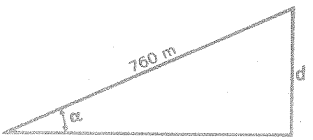


FIG. 121

PROBLEMA. — Calcular el desnivel salvado por un funicular cuya vía tiene una longitud de 760 metros, siendo la pendiente de la misma $p = 0'48$ (figura 121).

Si $p = 0'48 = \text{tg } \alpha$, $\alpha = 25° 39'$

Por consiguiente, el desnivel será

$d = 760 \times \text{sen } 25° 39' = 760 \times 0'43 = 326'80$ m.

EJERCICIOS

Resolver los siguientes triángulos rectángulos:

957. Dados: $B = 56° 31'$, $a = 200$ m.; hallar C, b, c.
958. Dados: $C = 68° 16'$, $c = 557$ m.; hallar B, b, a.
959. Dados: $B = 53° 42' 37''$, $b = 892$ cm.; hallar C, c, a.
960. Dados: $C = 19° 22'$, $c = 120$ mm.; hallar B, b, a.
961. Dados: $B = 38° 4' 12''$, $a = 40'36$ m.; hallar C, b, c.

962. Dados: $B = 72°$, $a = 58$ cm.; hallar C, b, c.
963. Dados: $C = 36° 43' 25''$, $b = 1.875$ mm.; hallar B, c, a.
964. Dados: $C = 73° 35'$, $b = 763$ cm.; hallar B, c, a.
965. Dados: $B = 84°$, $b = 0'0006$ Km.; hallar C, c, a.
966. Dados: $B = 25° 9' 56''$, $b = 39$ m.; hallar C, c, a.

967. Dados: $b = 7$ cm., $c = 7$ cm.; hallar B, C, a.
968. Dados: $a = 9'50$ m., $c = 8'64$ m.; hallar B, C, b.
969. Dados: $b = 19'630$ m., $c = 15'624$ m.; hallar B, C, a.
970. Dados: $b = 5'44$ m., $a = 82'16$ m.; hallar B, C, c.
971. Dados: $a = 1.275$ cm., $c = 1.124'3$ cm.; hallar B, C, b.

972. Dados: $c = \sqrt{2}$ m., $a = \sqrt{3}$ m.; hallar B, C, b.

Resolver los siguientes triángulos isósceles (A y C *son los ángulos iguales;* b, *la base;* l, *cada uno de los lados iguales, y* h, *la altura):*

973. Dados: $A = C = 68° 57'$, $l = 350$ m.; hallar B, b, h.
974. Dados: $A = C = 27° 8'$, $b = 3'65$ m.; hallar B, l, h.
975. Dados: $l = 79'24$ cm., $b = 106$ cm.; hallar $A = C$, B, h.
976. Dados: $b = 143$ m., $h = 150$ m.; hallar $A = C$, B, l.

977. Resolver un decágono regular cuyo radio mide 6'4 m.

978. Calcular el lado del pentágono regular inscrito en un círculo cuyo diámetro mide 35 centímetros.

979. En una circunferencia de 12 cm. de radio se traza una cuerda de 13 cm. Averiguar el ángulo central que abarca dicha cuerda.

980. Calcular la base y la altura de un rectángulo, sabiendo que su diagonal mide 84'50 cm., y uno de los ángulos adyacentes a ella, 72° 48'.

981. Calcular los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 137 cm. y 96 cm.

982. Hállese la diagonal de un pentágono regular cuyo lado mide 632 m.

983. Si una cuerda de longitud igual a 413 m. subtiende un arco de 45° 37', ¿cuál será el radio de la circunferencia?

984. La longitud del lado de un octógono regular es de 12 m. Calcular los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita.

985. La diagonal de un pentágono regular mide 32'80 m. ¿Cuál es el radio de la circunferencia circunscrita?

986. Calcular los ángulos de un trapecio isósceles cuyas bases miden 830 metros y 512 m. y la altura, 614 metros.

987. Averiguar el desnivel salvado por un tramo de carretera de 2 Km. de longitud, sabiendo que su pendiente es $p = 0'20$.

988. ¿A cuántos grados de altura sobre el horizonte se halla el Sol cuando un hombre de 1'72 m. de altura proyecta una sombra de 2'15 m.?

989. Un barco navega en dirección Noroeste a razón de 32 Km. por hora. ¿Cuántos kilómetros se habrá acercado hacia el Norte, después de dos horas de recorrido?

990. Un alambre tirante, de 16 m., está sujeto al suelo y al extremo de un poste vertical de 9 m. de alto. Hallar el ángulo que forma dicho alambre con la recta determinada por su pie y el pie del poste.

991. La cuerda de una cometa tiene 55 m. y forma con el suelo horizontal un ángulo de 52°. Suponiendo que esa cuerda está tirante, ¿a qué altura está la cometa sobre el suelo?

992. Una escalera de 7 m. descansa sobre una pared vertical y forma un ángulo de 63° con el suelo. Calcular: 1.°, la distancia de la pared al pie de la escalera; 2.°, la altura del punto en que se apoya el extremo de la escalera.

993. En el triángulo ABC, el ángulo B tiene 48°, el lado AC, 9 cm., y la altura correspondiente a C tiene 8 cm. Calcular: 1.°, el valor de A; 2.°, el de BC; 3.°, el de AB; 4.°, el de C.

994. En el triángulo obtusángulo ABC se tiene: $A = 110°$, $B = 30°$ y $BC = 12$ cm. Calcular: 1.°, la altura correspondiente al ángulo C; 2.°, el valor de AC; 3.°, el de AB.

995. Para medir la altura de un árbol (fig. 122), un observador coloca el teodolito (aparato para medir ángulos) en B, a 12 m. del pie del árbol. Dirige luego la visual BC y encuentra que forma con la horizontal BA un ángulo de 50°. ¿Cuál es la altura del árbol, sabiendo que la del teodolito es de 1'20 m.?

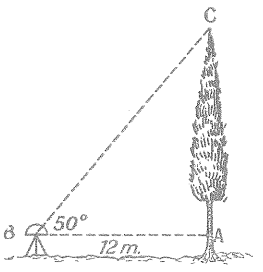


FIG. 122

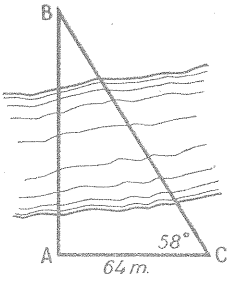


FIG. 123

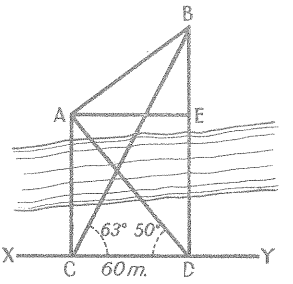


FIG. 124

996. Para medir la distancia del punto A al punto B, situado al otro lado del río (fig. 123), se ha tomado la base $AC = 64$ m., perpendicular a la visual AB, y desde el extremo C se ha medido el ángulo $C = 58°$. ¿Cuál es la distancia AB?

997. Para medir la distancia entre dos casas A y B, situadas al otro lado del río (fig. 124), se ha trazado la recta XY y se han tomado los puntos C y D, de modo que ACD y BDC sean rectos. Con el teodolito se dirigen luego las visuales CB y DA, encontrándose que $BCD = 63°$ y $ADC = 50°$. Sabiendo que $CD = 60$ m., ¿a qué distancia se encuentran las dos casas aludidas?

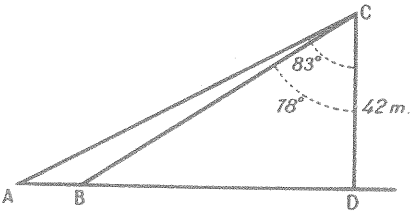


FIG. 125

998. Un observador C (fig. 125), situado en lo alto de un faro, a 42 m. sobre el nivel de las aguas, está en línea recta con dos barcas A y B. Mide con el teodolito los ángulos que forman las visuales CA y CB con la vertical CD, y encuentra 83° y 78°, respectivamente. ¿A qué distancia se hallan entre sí las barcas?

24. Gráficos estadísticos

172. Sucinta idea del valor de la Matemática en la vida ordinaria y como Ciencia auxiliar de otras ya estudiadas (Ciencias Naturales, Geografía Política y Económica, etc.). — Bajo dos aspectos es útil el estudio de la Matemática en la vida ordinaria: uno como ejercicio mental, contribuyendo al desarrollo de las facultades intelectuales, y otro como medio indispensable para adquirir ciertos conocimientos de uso constante en las actividades cotidianas.

El primero, que podríamos llamar *aspecto formativo* del estudio de la Matemática, enseña a razonar y a exponer ordenadamente las cuestiones. Acostumbra, asimismo, a la exactitud y a la ponderación en la medida de las cosas, haciendo que las veamos como son y no como a primera vista parecen. Por eso, el que ha estudiado con aprovechamiento las Matemáticas, tiene sobre el que no las ha estudiado una ventaja indiscutible, ya que se encontrará mucho mejor preparado para resolver favorablemente ciertos asuntos que exigen rapidez en apreciar las diversas circunstancias que en ellos influyen.

Por ejemplo: A un comerciante se le presenta una oportunidad de hacer una compra de importancia. Si tiene costumbre de ver con claridad y rapidez las ventajas e inconvenientes, y el sentido de interpretarlos en su verdadero valor —cualidades que desarrolla la Matemática—, podrá tomar una decisión acertada y conveniente a sus intereses; en caso contrario, se expone a realizar una operación que le perjudicaría.

El segundo aspecto por el cual es útil el estudio de la Matemática, es porque nos proporciona el medio de adquirir muchos conocimientos de uso común en la vida práctica. Sin el conocimiento de las reglas elementales que enseña la Matemática, nos encontraríamos con dificultades a cada paso: muchas veces, al comprar o vender, no sabríamos si nos engañaban o no; el agricultor no sabría calcular el valor de su cosecha; el granjero ignoraría si sus gastos superan a los ingresos, hasta que la realidad de los hechos le hiciera ver que ya no había remedio; el con-

tratista no sabría qué cantidad de materiales ha de adquirir para realizar una obra; el médico se vería expuesto a no dosificar convenientemente una receta y dar al traste con la salud de un enfermo; el estudiante no estaría en condiciones de entender muchas cuestiones de Física, como por ejemplo, el camino que recorre un móvil en un tiempo determinado, o la relación que existe entre la potencia y resistencia aplicadas a una palanca, etc., etc.

Este último ejemplo nos indica que la Matemática es un auxiliar o instrumento necesario en el estudio de otras ciencias, como las Ciencias Naturales, la Geografía Política y Económica, la Física, la Química, etc.

Así, en las Ciencias Naturales empleamos conocimientos matemáticos al interpretar el valor de la presión atmosférica de un lugar, al calcular la composición del agua, del aire o de las sustancias minerales, averiguando qué tanto por ciento de los diversos elementos entra en su constitución. Asimismo, con frecuencia sirve para caracterizar a los minerales la forma geométrica determinada que presentan sus cristales.

En Geografía Política, la Matemática nos enseña a calcular la densidad de población de un país, región o provincia; el crecimiento o decrecimiento de esa misma población; la distribución o tanto por ciento de los habitantes según las distintas profesiones, o bien según el idioma, la raza, la religión, etc.

Los datos estadísticos que proporciona la Geografía Económica sirven para determinar el grado de riqueza de una nación. La Matemática nos dirá cómo han de interpretarse esos datos y la manera de representarlos gráficamente para que sean más expresivos.

La Física y la Química se sirven también con mucha frecuencia de conocimientos adquiridos en Matemáticas.

173. Ejemplos. — Resolveremos algunos problemas que sirvan de confirmación a lo dicho en el párrafo anterior.

PROBLEMA 1.º — ¿Qué fuerza soporta un hombre por la presión atmosférica normal, suponiendo que la superficie de su piel mide 1'8 m^2?

La presión atmosférica normal equivale al peso de una columna de mercurio de 1 cm^2 de base por 76 cm. de altura, es decir, al peso de 76 cm^3 de mercurio. Ahora bien, como *peso* = *volumen* × *densidad*, y la densidad del mercurio es igual a 13'6, tendremos:

$$\textit{presión atmosférica normal} = 76 \times 13'6 = 1033 \text{ g./cm}^2 = 1'033 \text{ Kg./cm}^2$$

Por consiguiente, un hombre cuya piel mida 1'8 m^2 soporta una fuerza de

$$1'033 \times 180 = 185'94 \text{ Kg.}$$

PROBLEMA 2.º — Sabiendo que de 250 Kg. de remolacha se han obtenido 35 Kg. de azúcar, se desea averiguar cuál es el tanto por ciento de rendimiento.

100 Kg. de remolacha producirán (regla de tres):

$$\frac{35 \times 100}{250} = 14 \text{ Kg. de azúcar}$$

El rendimiento es, por tanto, el 14 %.

PROBLEMA 3.º — Hallar la composición centesimal del ácido sulfúrico.

Sabiendo que la fórmula del ácido sulfúrico es SO_4H_2, y que los pesos atómicos del azufre (S), oxígeno (O) e hidrógeno (H), son, respectivamente, 32, 18 y 1, hallaremos para el peso molecular del ácido sulfúrico:

$$\text{peso molecular} \left\{ \begin{array}{l} S = 32 \\ O_4 = 18 \times 4 = 64 \\ H_2 = 1 \times 2 \end{array} \right\} = 32 + 64 + 2 = \mathbf{98}$$

Bastará ahora plantear las siguientes reglas de tres:

Si en 98 g. de SO_4H_2 hay 32 g. de S
en 100 g. ..... habrá x

$$x = \frac{32 \times 100}{98} = 32'65 \text{ g. \% de S}$$

Si en 98 g. de SO_4H_2 hay 64 g. de O
en 100 g. ..... habrá y

$$y = \frac{64 \times 100}{98} = 65'30 \text{ g. \% de O}$$

Si en 98 g. de SO_4H_2 hay 2 g. de H
en 100 g. ..... habrá z

$$z = \frac{2 \times 100}{98} = 2'04 \text{ g. \% de H}$$

PROBLEMA 4.º — En un mapa dibujado a la escala 1 : 10.000.000, dos ciudades distan 4'75 cm. ¿Cuál es su distancia verdadera?

Plantearemos la siguiente regla de tres:

A 1 cm. del mapa corresponden en la realidad 10.000.000
a 4'75 cm. del mapa corresponderán x

De donde

$$x = 4'75 \times 10.000.000 = 47.500.000 \text{ cm.} = 475 \text{ Km.}$$

PROBLEMA 5.º — Sabiendo que la superficie de Europa es igual a 10.107.000 Km^2 y que su población absoluta en 1956 fue de 559.221.000 habitantes, se desea hallar la densidad de población de Europa en dicho año.

Para hallar la densidad de población se divide el número de habitantes por la superficie del país en que viven. Luego,

$$\text{densidad} = \frac{559.221.000}{10.107.000} = 55 \text{ hab./Km}^2$$

174. El método gráfico. — Para hacer más comprensiva la variación de ciertas magnitudes o la relación existente entre dos series de números, se acude con mucha frecuencia a la representación geométrica. La figura que se obtiene entonces se denomina *diagrama* o, simplemente, *gráfico*.

Hay muchas variedades de gráficos. Para la elección de uno determinado, se ha de tener en cuenta la clase de datos de que se dispone y el fin a que el gráfico se destina.

Los tipos de gráficos usados más corrientemente son: los diagramas lineales, los diagramas de barras, los gráficos de sectores, los histogramas y los cartogramas.

175. Diagramas lineales. — Los más sencillos se obtienen dibujando líneas de longitud proporcional a las cantidades que se quieren representar. Dichas líneas pueden trazarse vertical u horizontalmente.

EJEMPLO 1.º — Representar la producción de cereales en España en el año 1957, sabiendo que en cifras fue la siguiente:

	MILES DE QM.		MILES DE QM.
Trigo	47.474	Avena	5.352
Cebada	18.810	Centeno	4.959
Maíz	7.706	Arroz	3.878

Fuente de información: *Anuario Estadístico de España.*

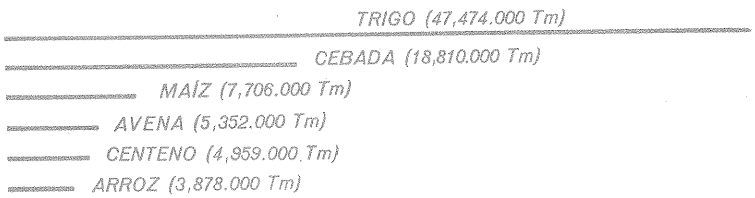


FIG. 126. — REPRESENTACIÓN LINEAL

Cuando se trata de fenómenos cuantitativos en los que interviene el tiempo, lo más frecuente es representarlos por medio de coordenadas rectangulares. Para ello, se elige un sistema de ejes, señalando en el de las *y* la escala de valores a que se refiere el fenómeno, y en el de las *x* la correspondiente al tiempo.

Esto nos permite obtener una serie de puntos, los cuales se unen consecutivamente por medio de rectas, con lo que resulta una línea quebrada. De este modo se establece una relación entre los distintos valores de la serie, lo que da una más clara y rápida idea de las variaciones del fenómeno representado.

En el mismo par de ejes se pueden representar uno o más fenómenos, o bien uno que conste de varios componentes. Como los datos que se manejan son generalmente positivos, bastará de ordinario trazar los semiejes que forman el primer cuadrante.

EJEMPLO 2.º — Representar gráficamente la producción nacional de *cemento* en el período que va de 1946 a 1957, sabiendo que en cifras fue la siguiente:

AÑO	TONELADAS	AÑO	TONELADAS	AÑO	TONELADAS
1946	1.834.706	1950	2.103.102	1954	3.332.659
1947	1.790.051	1951	2.322.847	1955	3.751.706
1948	1.803.454	1952	2.457.004	1956	3.998.757
1949	1.864.311	1953	2.772.932	1957	4.482.835

Fuente: *Anuario E. de España*

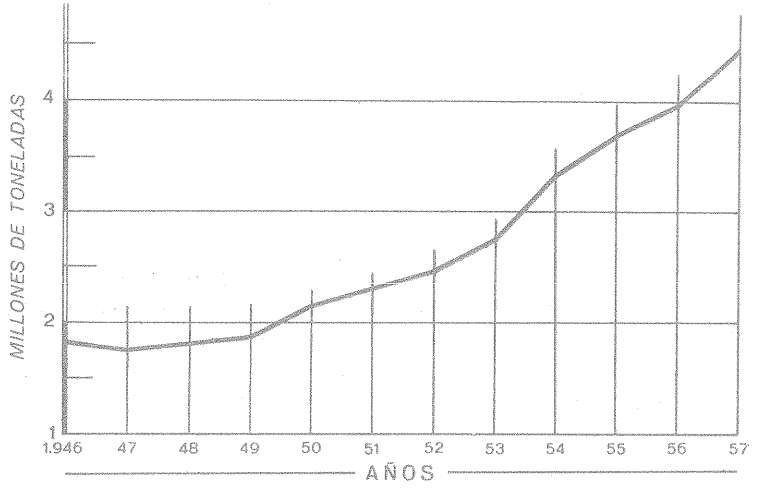


FIG 127. — DIAGRAMA LINEAL

EJEMPLO 3.º — Respresentar gráficamente la producción nacional de *lingotes de hierro* y *acero* en el período de 1950 a 1957, sabiendo que en cifras fue la siguiente:

AÑO	TONELADAS		AÑO	TONELADAS	
	Hierro	*Acero*		*Hierro*	*Acero*
1950	664.233	815.426	1954	877.453	1.099.986
1951	650.165	818.189	1955	963.614	1.213.115
1952	763.065	903.760	1956	913.032	1.243.277
1953	799.714	896.795	1957	963.000	1.345.762

Fuente: *Anuario E. de España.*

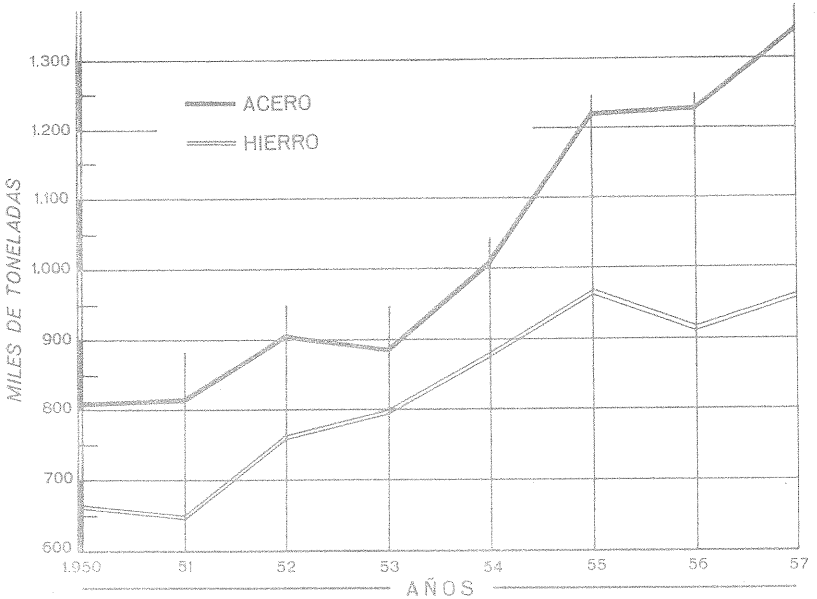


FIG. 128. — DIAGRAMA LINEAL

176. Diagramas de barras. — Esta clase de gráficos muestra claramente la variación de un fenómeno por comparación de barras (rectángulos alargados) de la misma base y de altura proporcional a las cantidades representadas. Se pueden considerar dos tipos: *a)* diagramas de barras simples, y *b)* diagramas de barras subdivididas, o de partes componentes.

EJEMPLO 1.º — Representar por medio de un gráfico de barras el tráfico urbano diario en Madrid y Barcelona (año 1957), conociendo los siguientes datos:

PROMEDIO DIARIO DE VIAJEROS (año 1957)

	En metropolitano	*En tranvías*	*En autobuses*	*En trolebuses*
Madrid	1.068.219	696.496	310.373	83.542
Barcelona	437.507	798.444	114.685	120.723

Fuente: *Anuario E. de España.*

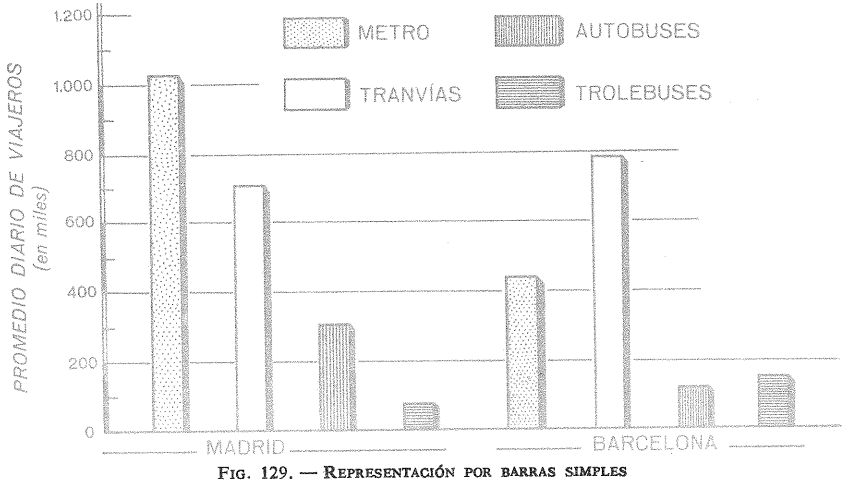


FIG. 129. — REPRESENTACIÓN POR BARRAS SIMPLES

EJEMPLO 2.º — Representar por medio de un gráfico de columnas o barras el censo universitario español en el curso 1955-56, sabiendo que el número de alumnos matriculados en ese curso, por facultades y sexos, fue el siguiente:

FACULTAD	VARONES	MUJERES	TOTAL
Ciencias	8.938	2.136	11.074
Ciencias Políticas y Económicas	2.152	139	2.291
Derecho	16.558	827	17.385
Farmacia	2.620	2.714	5.334
Filosofía y Letras	1.766	3.581	5.347
Medicina	12.630	639	13.269
Veterinaria	2.314	16	2.330

Fuente: *Anuario E. de España.*

177. **Gráficos de sectores.** — Para representar las partes componentes de un conjunto, se emplean frecuentemente los *gráficos de sectores*, los cuales son de fácil interpretación y lectura. Su construcción es también sencilla. Basta dividir los 360° de un círculo en partes proporcionales a cada uno de los componentes. Los grados que resulten para los diversos datos, serán las amplitudes de los respectivos sectores.

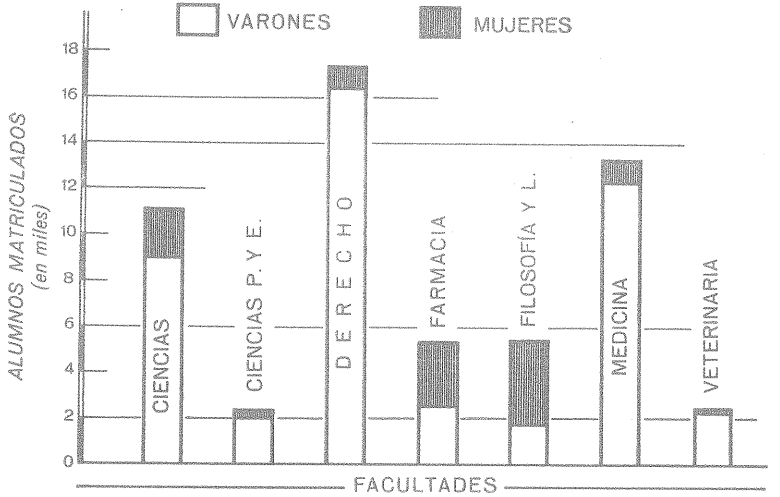


FIG. 130. — GRÁFICA DE BARRAS SUBDIVIDIDAS

EJEMPLO 1.° — De los 510.000.000 de kilómetros cuadrados que tiene de extensión la superficie terrestre, 149.000.000 están ocupados por las tierras emergidas y 361.000.000 por las aguas marítimas. Represéntese esta distribución de tierras y mares por medio de un gráfico de sectores.

Comenzaremos por dibujar un círculo con un radio cualquiera, y luego trazaremos en él dos sectores que tengan por amplitud

$$\frac{149 \times 360}{510} = 105° \quad \text{y} \quad \frac{361 \times 360}{510} = 255° \quad \text{(Figura 131)}$$

EJEMPLO 2.° — Representar gráficamente por medio de sectores la distribución anual de gastos de una familia, sabiendo que sus ingresos se elevan a 54.000 pesetas, repartiéndose sus gastos como sigue: casa, 12.000 ptas.; comida, 18.000 ptas.; vestido, 3.900 ptas.; viajes y diversiones, 3.600 ptas.; varios, 4.200 ptas.

Teniendo en cuenta que en concepto de ahorros le quedan a la referida familia 12.300 ptas. anuales, obtendremos para los diversos sectores:

$$\frac{12.000 \times 360}{54.000} = 80°; \quad \frac{18.000 \times 360}{54.000} = 120°; \quad \frac{3.900 \times 360}{54.000} = 26°$$

$$\frac{3.600 \times 360}{54.000} = 24°; \quad \frac{4.200 \times 360}{54.000} = 28°; \quad \frac{12.300 \times 360}{54.000} = 82°$$

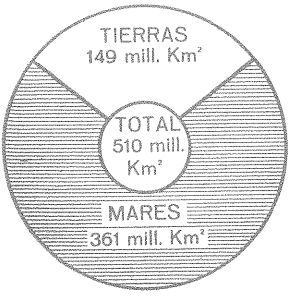


FIG. 131. — GRÁFICO DE SECTORES

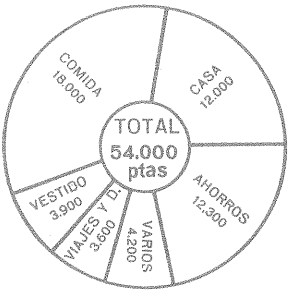


FIG. 132. — GRÁFICO DE SECTORES

EJEMPLO 3.º — Representar por medio de un gráfico de sectores la distribución de las diversas religiones del mundo, teniendo en cuenta la siguiente estadística correspondiente al año 1955:

Cristianos	Católicos	472	millones
	Protestantes	250	»
	Cismáticos	200	»
No cristianos	Confucianos	400	»
	Musulmanes	405	»
	Hinduístas	280	»
	Budistas	205	»
	Animistas	100	»
	Ateos	95	»
	Varios	93	»
	TOTAL	2.500	millones

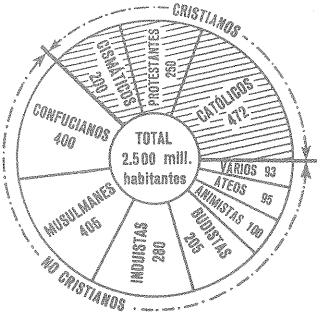


FIG. 133. — GRÁFICO DE SECTORES

178. Histogramas. — Entre los gráficos que se emplean con más frecuencia están los *histogramas*, consistentes en rectángulos contiguos de igual base y de altura proporcional a la intensidad o frecuencia del dato correspondiente. Expliquemos esto mediante un ejemplo.

EJEMPLO. — En un colegio se ha pesado a los 45 alumnos que componen una clase y se han obtenido los siguientes pesos en kilogramos:

52	40'9	39'2	54'2	47'5	45'8	49	50'3	53'2
61'7	56'5	64	48'5	53'4	52'5	57'2	52	47'2
47'2	53'4	68'3	41'3	56'7	56'4	46'3	49	51'5
58'8	43'6	57'4	44	49'2	51'8	52	50'8	54
37	63	53	56'6	46	48'1	56'1	56	43

Cuando en Estadística nos encontramos con una tabla como la anterior, hay que proceder a la ordenación o *distribución* de sus valores. Así,

en este caso, si queremos obtener una idea más clara de cómo se distribuyen los alumnos con relación a sus pesos, agruparemos a éstos en intervalos de 5 en 5 kilogramos, por ejemplo, y contaremos el número de alumnos que tienen su peso comprendido dentro de cada intervalo. *Esta ordenación de los datos numéricos de una tabla, atendiendo a su tamaño o magnitud, se denomina distribución de frecuencias.*

He aquí la distribución de frecuencias a que da lugar la tabla anterior, tomando como intervalo 5 kilogramos:

INTERVALOS Pesos en Kg.	RECUENTO DE DATOS	FRECUENCIAS Número de alumnos
De 35 a 39'9 Kg.	II	2
» 40 a 44'9 »	IIIII	5
» 45 a 49'9 »	IIIIIIIIIII	11
» 50 a 54'9 »	IIIIIIIIIIIII	14
» 55 a 59'9 »	IIIIIIIII	9
» 60 a 64'9 »	III	3
» 65 a 69'9 »	I	1

En la primera columna aparecen los distintos grupos que se han hecho con los datos de la tabla, los cuales reciben el nombre de *intervalos de clase*. La amplitud de estos intervalos depende del número de valores o datos de que consta la tabla que nos dan. Los intervalos de clase no deben superponerse: por eso hemos puesto 35 a 39'9, 40 a 44'9, ..., en vez de 35 a 40, 40 a 45, etc.

En la segunda columna se han ido escribiendo rayitas, una por cada dato cuyo valor se halla incluído en el intervalo correspondiente. La suma de esas rayitas, según los distintos intervalos, aparece escrita en la tercera columna. Estos números, que expresan cuántos datos de la serie se hallan incluídos en cada intervalo, se denominan *frecuencia* de dichos intervalos.

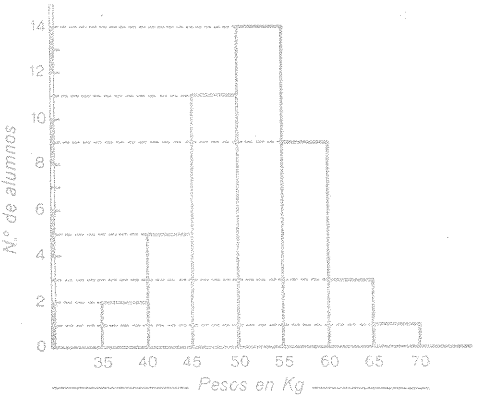


FIG 134. — HISTOGRAMA

Representación gráfica de la distribución de frecuencias. — En un sistema de ejes coordenados rectangulares, dividiremos a éstos en unidades que expresen los datos en forma conveniente. Los intervalos de clase se suelen colocar en el eje de las x (horizontal) y las frecuencias en el eje de las y (vertical). Sobre cada intervalo se construye luego un rectángulo de altura igual a la frecuencia respectiva, con lo que habremos obtenido una figura llamada *histograma* (fig. 134). El área de cada uno de los rectángulos que lo forman es proporcional a la frecuencia correspondiente al intervalo que sirve de base.

En resumen, diremos que *un histograma representa a una distribución de frecuencias mediante rectángulos.*

179. **Cartogramas.** — Se denominan *cartogramas* aquellos mapas en los que por medio de rectángulos, círculos u otras figuras de distintos tamaños, o bien valiéndose de rayados o coloraciones diversas, se repre-

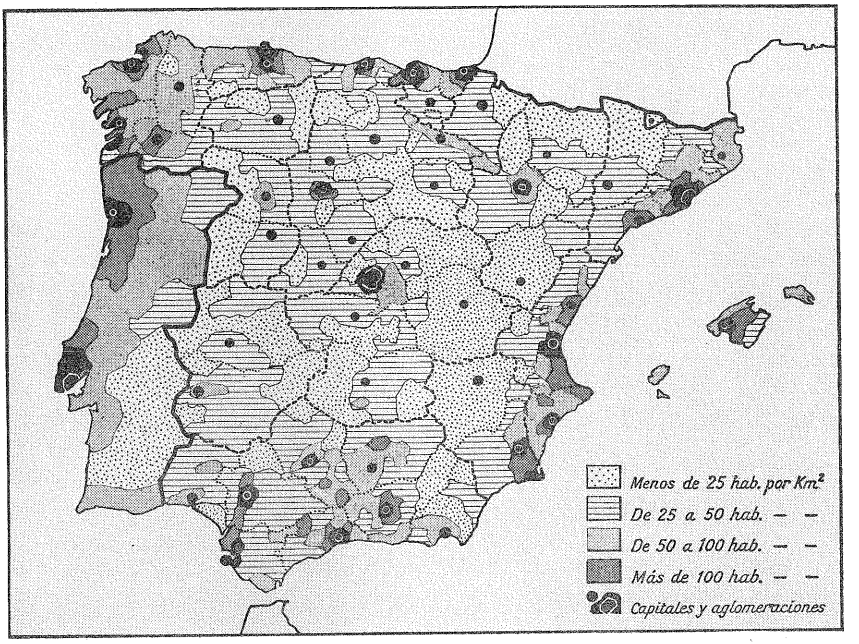


FIG. 135. — EJEMPLO DE CARTOGRAMA
DENSIDAD DE POBLACIÓN DE LA PENÍNSULA IBÉRICA

sentan las distribuciones o densidades geográficas, o sea, números o dimensiones que están en relación con una superficie dada.

Así, en el mapa de la figura 135 se ha representado mediante diversas clases de rayados la distribución o densidad de población de la Península Ibérica.

EJERCICIOS

999. Representar por medio de un diagrama lineal de coordenadas rectangulares la población de España (Península e Islas adyacentes) en el período comprendido entre 1900 y 1950, conociendo los siguientes datos, tomados del *Anuario Estadístico de España:*

CENSOS OFICIALES

1900	18.594.405 hab.	1930	23.563.867 hab.
1910	19.927.150 hab.	1940	25.877.971 hab.
1920	21.303.162 hab.	1950	27.967.755 hab.

1000. La producción de aceite en España en los años 1941 a 1952 fue:

Año	*Miles de Qm.*	*Año*	*Miles de Qm.*	*Año*	*Miles de Qm.*
1941	19.459	1945	9.733	1949	19.242
1942	13.011	1946	19.977	1950	9.019
1943	20.566	1947	25.554	1951	29.506
1944	13.216	1948	7.326	1952	14.986

Representar gráficamente esta serie por medio de un diagrama lineal.

1001. La producción nacional de algodón en las campañas 1948-49 a 1953-54 fue la siguiente:

Campaña	*Kg. de fibra*	*Campaña*	*Kg. de fibra*
1948-49	6.508.580	1951-52	7.637.225
1949-50	2.870.840	1952-53	16.188.871
1950-51	3.895.658	1953-54	18.511.032

Representar gráficamente esta serie por medio de un diagrama de barras.

1002. El comercio exterior de España en el año 1956 fue:

Mercancía	*Importación*	*Exportación*
Primeras materias	5.263.629 Tm.	6.803.688 Tm.
Artículos fabricados	2.633.800 Tm.	1.601.878 Tm.
Sustancias alimenticias	466.251 Tm.	1.427.244 Tm.

Representar gráficamente esta serie por medio de un diagrama de barras. (Pónganse una al lado de otra y diferénciense las dos barras representativas de la importación y exportación en cada mercancía).

1003. El número de alumnos matriculados en las Escuelas del Magisterio de España en los cursos 1950-51 a 1955-56 fue:

Curso	*Varones*	*Mujeres*	*Curso*	*Varones*	*Mujeres*
1950-51	5.613	14.329	1953-54	7.155	18.181
1951-52	5.609	15.477	1954-55	8.099	17.114
1952-53	6.554	17.830	1955-56	10.447	18.104

Representar esta serie gráficamente por medio de un diagrama de barras subdivididas.

1004. El volumen de contratación en las tres Bolsas españolas en el año 1957 fue el siguiente: Madrid, 5.574'5 millones de ptas.; Barcelona, 1.941'3 millones de ptas.; Bilbao, 1.231 millones de ptas. Representar gráficamente esta serie por medio de sectores.

1005. La superficie de las diversas partes del mundo, expresada en miles de kilómetros cuadrados, es la siguiente: Europa, 10.050; Asia, 44.150; África, 30.500; América, 41.980; Australia y Oceanía, 8.965; Antártida, 13.177. Representar esta serie por un gráfico de sectores.

1006. Las calificaciones obtenidas en Matemáticas en los exámenes finales por los 30 alumnos que componen un Curso de Bachillerato, fueron éstas:

7, 6, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 5, 9, 3, 4, 4, 7, 7,
6, 6, 5, 6, 4, 7, 6, 5, 8, 4, 6, 5, 5, 5, 6.

Se desea: 1.º Hallar la distribución de frecuencias a que da lugar la serie anterior, tomando como intervalo *un punto*. 2.º Representar gráficamente la distribución por medio de un histograma.

1007. Los jornales (en pesetas) de los 100 obreros que trabajan en una fábrica son los siguientes:

72	65	68	75	96	87	67	69	79	73
73	54	69	69	77	79	71	81	64	88
62	62	71	81	93	81	65	64	82	104
65	47	108	77	87	79	88	87	79	93
84	70	82	73	75	86	79	92	92	88
73	84	103	81	65	94	96	107	97	84
64	92	74	69	80	96	78	93	67	65
62	66	90	72	74	105	72	63	96	92
60	74	78	80	96	77	92	81	88	71
60	70	92	76	110	84	83	78	93	61

Hallar: 1.º La distribución de frecuencias, tomando como intervalo 10 ptas. 2.º El histograma correspondiente.

INDICE

ÁLGEBRA

	PÁGS
LECCIÓN 1.ª — Los números negativos	5
LECCIÓN 2.ª — Operaciones con números racionales	11
LECCIÓN 3.ª — Operaciones con números racionales *(continuación)*	23
LECCIÓN 4.ª — Expresiones algebraicas	30
LECCIÓN 5.ª — Operaciones con monomios y polinomios	39
LECCIÓN 6.ª — División algebraica	48
LECCIÓN 7.ª — Potenciación algebraica	56
LECCIÓN 8.ª — Operaciones con fracciones algebraicas	64
LECCIÓN 9.ª — Ecuaciones de primer grado	72
LECCIÓN 10. — Problemas de primer grado con una incógnita	85
LECCIÓN 11. — Sistema de ecuaciones	98

GEOMETRÍA

LECCIÓN 12. — Aplicaciones de la semejanza	109
LECCIÓN 13. — Puntos notables de un triángulo	117
LECCIÓN 14. — Relaciones métricas en los triángulos rectángulos	126
LECCIÓN 15. — Relaciones métricas en los triángulos oblicuángulos	135
LECCIÓN 16. — Bisectrices de un triángulo	142
LECCIÓN 17. — Potencia de un punto respecto de una circunferencia	148
LECCIÓN 18. — Construcciones geométricas	154
LECCIÓN 19. — Coordenadas cartesianas	163
LECCIÓN 20. — Representaciones gráficas	173
LECCIÓN 21. — Resolución gráfica de sistemas	185
LECCIÓN 22. — Razones goniométricas	196
LECCIÓN 23. — Resolución de triángulos rectángulos	209
LECCIÓN 24. — Gráficos estadísticos	219

tablas trigonométricas naturales

por

edelvives

editorial luis vives, s·a
zaragoza

TABLAS TRIGONOMÉTRICAS NATURALES

POR

EDELVIVES

EDITORIAL LUIS VIVES, S. A.
Zaragoza

ES PROPIEDAD. — IMPRESO EN ESPAÑA
Copyright, 1963, by Editorial Luis Vives
IMPRENTA DEL EDITOR

Depósito legal. Z. 259. - 1959

TABLAS TRIGONOMÉTRICAS NATURALES

DESCRIPCIÓN DE LAS TABLAS

Se da el nombre de *tablas trigonométricas naturales* a una serie de cuadros que contienen los valores numéricos de las razones goniométricas de los ángulos comprendidos entre 0° y 90°.

Dichos valores están calculados generalmente con el mismo número de cifras decimales, siendo la última aproximada por defecto o por exceso, para que el error cometido sea inferior a *media unidad* del último orden decimal. En estas tablas aparecen en *negrita* las últimas cifras, cuando están aproximadas por exceso.

Las presentes tablas están basadas en la graduación sexagesimal de la circunferencia, y los ángulos se suceden de minuto en minuto.

Como las razones de un ángulo se relacionan con las de su complementario de modo que el seno de uno es igual al coseno del otro, y la tangente de uno tiene el mismo valor que la cotangente del otro, se suele evitar el dar a las tablas demasiada extensión, abriendo un encabezamiento en la parte inferior de sus páginas.

Para los ángulos inferiores a 45°, los grados están escritos encima de cada una de las dos partes en que están divididas las páginas, y los minutos en la primera columna de la izquierda de cada una de dichas partes. Esta graduación es *directa*, es decir, crece en el mismo sentido que la numeración de las páginas; el número de minutos crece *descendiendo* en cada página.

Para los ángulos superiores a 45°, los grados se hallan escritos debajo de cada una de las dos partes en que están divididas las páginas, y los minutos en la primera columna de la derecha de cada una de dichas partes.

Esta graduación es *inversa*, es decir, crece en sentido contrario de la anterior; el número de minutos crece *ascendiendo* en cada página.

Dos ángulos, correspondiente uno a la graduación superior y otro a la inferior de cada mitad de página, y cuyos minutos están escritos, respectivamente, a la izquierda y a la derecha en la misma horizontal, son *complementarios*.

Las columnas de minutos sirven para las cuatro columnas de razones goniométricas que aparecen en las tablas. Los títulos o encabezamientos de cada columna son dos, que corresponden a las dos graduaciones indicadas, y como los ángulos de estas graduaciones son complementarios, los títulos superiores *seno, coseno, tang.* y *cotang.* se corresponden con los inferiores *coseno, seno, cotang.* y *tang.*

Los senos y cosenos son siempre inferiores a la unidad, y lo mismo sucede con las tangentes de ángulos inferiores a 45° y cotangentes superiores a 45°. Como la parte entera es común a muchos ángulos, se escribe generalmente sólo al principio de cada grupo de cinco, en que están divididas las columnas.

Cada valor de las tablas corresponde a dos razones de ángulos complementarios. Así, tendremos, por ejemplo (pág. 19):

$$\text{sen } 18° 38' = \cos 71° 22' = 0'31951$$
$$\text{tg } 18° 54' = \text{cotg } 71° 6' = 0'34238$$

Los senos y tangentes crecen con los ángulos hasta 90°; luego, las diferencias correspondientes a dos ángulos consecutivos son *positivas*, tomando como minuendo el valor de la razón que corresponde al ángulo mayor. Lo contrario sucede con los cosenos y cotangentes, por lo que sus diferencias son *negativas*.

MANEJO DE LAS TABLAS

Los dos problemas que pueden presentarse en el *manejo* de las tablas trigonométricas naturales, son los siguientes:

I. PROBLEMA DIRECTO: **Dado un ángulo, hallar el valor de sus razones goniométricas.**

PRIMER CASO: *El ángulo está comprendido exactamente en las tablas, o sea, consta solamente de grados y minutos.*

Si el ángulo es inferior a 45°, se buscarán los grados en la parte superior de las páginas y los minutos en la primera columna de la izquierda, que crece de arriba abajo; hecho esto, en la horizontal a que hayamos llegado, estará el valor de la razón goniométrica que se busca.

EJEMPLOS:

sen 40° 27′ = 0,64878
cos 40° 33′ = 0'75984
tg 40° 41′ = 0'85963
cotg 40° 57′ = 1'15240

Si el ángulo es superior a 45°, se buscarán los grados en la parte inferior de las páginas y los minutos en la primera columna de la derecha, que crece de abajo arriba; en la horizontal a que hayamos llegado, se encontrará el valor de la razón que se pide.

EJEMPLOS:

sen 48° 28′ = 0'74857
cos 48° 51′ = 0'65803
tg 48° 7′ = 1'11517
cotg 48° 15′ = 0'89253

SEGUNDO CASO: *El ángulo no está comprendido exactamente en las tablas, es decir, consta de grados, minutos y segundos.*

En este caso el problema se resuelve por *interpolación.* Admitiendo que *las diferencias de dos ángulos son proporcionales a las diferencias de los valores de sus razones goniométricas* (*), podemos razonar del siguiente modo:

Si al diferenciarse dos ángulos en 1′ = 60″,
los valores correspondientes de una de sus razones se diferencian en D; al diferenciarse dos ángulos en h'',
los valores correspondientes de una de sus razones se diferenciarán en d.

(*) Hay que exceptuar el caso en que se trate de cotangentes de ángulos inferiores a 9° o tangentes de ángulos superiores a 81°, porque entonces las diferencias segundas son demasiado grandes.

De donde se deduce la siguiente proporción:

$$\frac{60''}{h''} = \frac{D}{d}; \quad \text{y despejando } d, \text{ resulta: } \quad d = \frac{D \times h''}{60}$$

fórmula en la que:

h'' representa los segundos del ángulo dado;

D representa la diferencia entre dos valores consecutivos de las tablas: los correspondientes a los ángulos más próximos (superior e inferior), dados por las tablas;

d representa la *corrección* que ha de hacerse en el valor tabular de la razón correspondiente al ángulo más próximo inferior al dado.

El valor hallado para d es POSITIVO cuando la diferencia tabular D es positiva, es decir, para los *senos* y *tangentes* (son razones crecientes); y NEGATIVO cuando D es negativa, o sea, para los *cosenos* y *cotangentes* (son razones decrecientes).

EJEMPLO 1.º — *Hallar sen* 20° 2′ 18″.

Leemos en las tablas: sen 20° 2′ = 0'34257; sen 20° 3′ = 0'34284.

Para un crecimiento de α en 1′ = 60″, el crecimiento del seno es

$$D = 0'34284 - 0'34257 = 0'00027,$$

o sea,

$$D = 84 - 57 = 27 \text{ cienmilésimas.}$$

Para 1″, este crecimiento sería $\frac{27}{60}$, y para 18″, la corrección d será

$$d = \frac{27 \times 18}{60} = 8'1.$$

Redondeando 8'1 (para lo cual se desprecia la parte decimal, a no ser que su primera cifra sea 5 o superior a 5, en cuyo caso se añade una unidad a la parte entera), y sumando este valor (no se olvide que son cienmilésimas), a sen 20° 2′, resulta:

$$\text{sen } 20° \; 2' \, 18'' = 0'34257 + 0'00008 = 0'34265$$

EJEMPLO 2.º — *Determinar tg* 69° 40′ 30″.

Disposición práctica:

$$\text{tg } 69° \; 40' \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 2'69853; \quad D = 241$$

$$\text{Para } \quad 30'', \; d = \frac{241 \times 30}{60} = \frac{121}{}$$

$$\text{tg } 69° \; 40' \; 30'' \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 2'69974$$

EJEMPLO 3.º — *Hallar cos* 20° 37′ 20″.

$$\cos 20° \; 37' \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0'93596; \quad D = -11$$

$$\text{Para } \quad 20'', \; d = \frac{(-11) \times 20}{60} = \frac{-4}{}$$

$$\cos 20° \; 37' \; 20'' \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0'93592$$

EJEMPLO 4.º — *Hallar cotg* 69° 25′ 15″.

$$\text{cotg } 69° \; 25' \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0'37554; \quad D = -33$$

$$\text{Para } \quad 15'', \; d = \frac{(-33) \times 15}{60} = \frac{-8}{}$$

$$\text{cotg } 69° \; 25' \; 15'' \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0'37546$$

II. PROBLEMA INVERSO: **Dado el valor de una razón goniométrica, determinar el ángulo a que corresponde.**

PRIMER CASO: *El valor dado se encuentra exactamente en las tablas.*

Se le buscará en la columna correspondiente del mismo nombre que la razón dada, sea leyendo los títulos en la parte superior o bien haciéndolo en la inferior. Para encontrarle más rápidamente, se ha de tener presente que los senos y tangentes crecen en el intervalo 0° a 90°, mientras que los cosenos y cotangentes decrecen.

Si el nombre de la razón cuyo valor se ha buscado, corresponde al título superior de la columna, el número de grados será el que figura en la parte superior de la página, y los minutos se leerán en la columna correspondiente de la izquierda. Si, por el contrario, el valor corresponde al título inferior de la columna, el número de grados será el de la parte inferior de la página, y los minutos se encontrarán en la parte derecha.

EJEMPLOS:

Si sen $\alpha = 0'67387$, $\alpha = 42° 22'$
si cos $\alpha = 0'73806$, $\alpha = 42° 26'$
si tg $\alpha = 0'92062$, $\alpha = 42° 38'$
si cotg $\alpha = 1'07801$, $\alpha = 42° 51'$

SEGUNDO CASO: *El valor dado no se encuentra exactamente en las tablas.*

Este caso, como su correspondiente del problema directo, lo resolveremos por *interpolación*. Razonemos del siguiente modo:

Supongamos que $V + d$ es el valor de una razón goniométrica que se nos da, y sean V y $V + D$ los dos valores tabulares entre los cuales se encuentra el dado; llamando α y $\alpha + 60''$ a los ángulos correspondientes a esos valores, y $\alpha + h''$ al que corresponde a $V + d$, se tendrá (recuérdese que admitimos la proporcionalidad entre las diferencias de dos ángulos y las diferencias de los valores de sus razones):

$$\frac{(\alpha+60'') - \alpha}{(\alpha+h'') - \alpha} = \frac{(V+D) - V}{(V+d) - V} \quad \text{o bien,} \quad \frac{60''}{h''} = \frac{D}{d}$$

de donde,

$$h'' = \frac{60'' \times d}{D}$$

y el ángulo buscado será

$$\alpha + h'' = \alpha + \frac{60'' \times d}{D}$$

Hay que tener presente que cuando se trata de *senos* y *tangentes*, d es la diferencia entre el valor dado y el *próximo inferior* de las tablas, por lo que d y D serán *positivas;* en cambio, cuando se trata de *cosenos* y *cotangentes*, d es la diferencia entre el valor dado y el *próximo superior* de las tablas, siendo d y D *negativas*. En ambos casos, por tanto, el cociente $\frac{60'' \times d}{D}$ será positivo.

EJEMPLO 1.° — *Determinar* α, *sabiendo que sen* $\alpha = 0'93530$.

Leemos en las tablas: $0'93524 = \text{sen } 69° \ 16'$.

Cuando el seno crece en $D = 0'93534 - 0'93524 = 0'00010$, o sea, en $D = 34 - 24 = 10$ cienmilésimas, el ángulo α crece en $1' = 60''$. Para un crecimiento del seno en $d = 30 - 24 = 6$, la corrección h'' que ha de hacerse en α, será

$$\frac{60'' \times 6}{10} = 36''$$

Luego, $\alpha = 69° \ 16' \ 36''$

EJEMPLO 2.° — *Calcular* α, *sabiendo que tg* $\alpha = 0'37633$.

Disposición práctica:

$\text{tg } \alpha = 0'37621$ ..... $\alpha = 20° \ 37'$ $\qquad d = 12; \ D = 33$

Para 12, $h'' = \dfrac{60'' \times 12}{33} = 22''$

$\text{tg } \alpha = 0'37633$ ..... $\alpha = 20° \ 37' \ 22''$

EJEMPLO 3.° — *Determinar* α, *sabiendo que cos* $\alpha = 0'93154$.

$\cos \alpha = 0'93159$ ..... $\alpha = 21° \ 19'$ $\qquad d = -5; \ D = -11$

Para -5, $h'' = \dfrac{60'' \times 5}{11} = 27''$

$\cos \alpha = 0'93154$ ..... $\alpha = 21° \ 19' \ 27''$

EJEMPLO 4.° — *Calcular* α, *sabiendo que cotg* $\alpha = 4'36048$.

$\text{cotg } \alpha = 4'36623$ ..... $\alpha = 12° \ 54'$ $\qquad \begin{cases} d = -575 \\ D = -583 \end{cases}$

Para -575, $h'' = \dfrac{60'' \times 575}{583} = 59''$

$\text{cotg } \alpha = 4'36048$ ..... $\alpha = 12° \ 54' \ 59''$

0°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,00000	1,00000	0,00000	∞	60
1	00029	00000	00029	3437,7467	59
2	00058	00000	00058	1718,8732	58
3	00087	00000	00087	1145,9153	57
4	00116	00000	00116	859,4363	56
5	0,00145	1,00000	0,00145	687,5489	55
6	00175	00000	00175	572,9572	54
7	00204	00000	00204	491,1060	53
8	00233	00000	00233	429,7176	52
9	00262	00000	00262	381,9710	51
10	0,00291	1,00000	0,00291	343,7737	50
11	00320	0,99999	00320	312,5214	49
12	00349	99999	00349	286,4777	48
13	00378	99999	00378	264,4408	47
14	00407	99999	00407	245,5520	46
15	0,00436	0,99999	0,00436	229,1817	45
16	00465	99999	00465	214,8576	44
17	00495	99999	00495	202,2187	43
18	00524	99999	00524	190,9842	42
19	00553	99998	00553	180,9322	41
20	0,00582	0,99998	0,00582	171,8854	40
21	00611	99998	00611	163,7002	39
22	00640	99998	00640	156,2591	38
23	00669	99998	00669	149,4650	37
24	00698	99998	00698	143,2371	36
25	0,00727	0,99997	0,00727	137,5075	35
26	00756	99997	00756	132,2185	34
27	00785	99997	00785	127,3213	33
28	00814	99997	00815	122,7740	32
29	00844	99996	00844	118,5402	31
30	0,00873	0,99996	0,00873	114,5887	30
31	00902	99996	00902	110,8921	29
32	00931	99996	00931	107,4265	28
33	00960	99995	00960	104,1709	27
34	00989	99995	00989	101,1069	26
35	0,01018	0,99995	0,01018	98,2179	25
36	01047	99995	01047	95,4895	24
37	01076	99994	01076	92,9085	23
38	01105	99994	01105	90,4633	22
39	01134	99994	01135	88,1436	21
40	0,01164	0,99993	0,01164	85,9398	20
41	01193	99993	01193	83,8435	19
42	01222	99993	01222	81,8470	18
43	01251	99992	01251	79,9434	17
44	01280	99992	01280	78,1263	16
45	0,01309	0,99991	0,01309	76,3900	15
46	01338	99991	01338	74,7292	14
47	01367	99991	01367	73,1390	13
48	01396	99990	01396	71,6151	12
49	01425	99990	01425	70,1533	11
50	0,01454	0,99989	0,01455	68,7501	10
51	01483	99989	01484	67,4019	9
52	01513	99989	01513	66,1055	8
53	01542	99988	01542	64,8580	7
54	01571	99988	01571	63,6567	6
55	0,01600	0,99987	0,01600	62,4992	5
56	01629	99987	01629	61,3829	4
57	01658	99986	01658	60,3058	3
58	01687	99986	01687	59,2659	2
59	01716	99985	01716	58,2612	1
60	0,01745	0,99985	0,01746	57,2900	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

89°

1°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,01745	0,99985	0,01746	57,2900	60
1	01774	99984	01775	56,3506	59
2	01803	99984	01804	55,4415	58
3	01832	99983	01833	54,5613	57
4	01862	99983	01862	53,7086	56
5	0,01891	0,99982	0,01891	52,8821	55
6	01920	99982	01920	52,0807	54
7	01949	99981	01949	51,3032	53
8	01978	99980	01978	50,5485	52
9	02007	99980	02007	49,8157	51
10	0,02036	0,99979	0,02036	49,1039	50
11	02065	99979	02066	48,4121	49
12	02094	99978	02095	47,7395	48
13	02123	99977	02124	47,0853	47
14	02152	99977	02153	46,4489	46
15	0,02181	0,99976	0,02182	45,8294	45
16	02211	99976	02211	45,2261	44
17	02240	99975	02240	44,6386	43
18	02269	99974	02269	44,0661	42
19	02298	99974	02298	43,5081	41
20	0,02327	0,99973	0,02328	42,9641	40
21	02356	99972	02357	42,4335	39
22	02385	99972	02386	41,9158	38
23	02414	99971	02415	41,4106	37
24	02443	99970	02444	40,9174	36
25	0,02472	0,99969	0,02473	40,4358	35
26	02501	99969	02502	39,9655	34
27	02530	99968	02531	39,5059	33
28	02560	99967	02560	39,0568	32
29	02589	99966	02589	38,6177	31
30	0,02618	0,99966	0,02619	38,1885	30
31	02647	99965	02648	37,7686	29
32	02676	99964	02677	37,3579	28
33	02705	99963	02706	36,9560	27
34	02734	99963	02735	36,5627	26
35	0,02763	0,99962	0,02764	36,1776	25
36	02792	99961	02793	35,8006	24
37	02821	99960	02822	35,4313	23
38	02850	99959	02851	35,0695	22
39	02879	99959	02881	34,7151	21
40	0,02908	0,99958	0,02910	34,3678	20
41	02938	99957	02939	34,0273	19
42	02967	99956	02968	33,6935	18
43	02996	99955	02997	33,3662	17
44	03025	99954	03026	33,0452	16
45	0,03054	0,99953	0,03055	32,7303	15
46	03083	99952	03084	32,4213	14
47	03112	99952	03114	32,1181	13
48	03141	99951	03143	31,8205	12
49	03170	99950	03172	31,5284	11
50	0,03199	0,99949	0,03201	31,2416	10
51	03228	99948	03230	30,9599	9
52	03257	99947	03259	30,6833	8
53	03286	99946	03288	30,4116	7
54	03316	99945	03317	30,1446	6
55	0,03345	0,99944	0,03346	29,8823	5
56	03374	99943	03376	29,6245	4
57	03403	99942	03405	29,3711	3
58	03432	99941	03434	29,1220	2
59	03461	99940	03463	28,8771	1
60	0,03490	0,99939	0,03492	28,6363	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

88°

2°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,03490	0,99939	0'03492	28,6363	60
1	03519	99938	03521	3994	59
2	03548	99937	03550	1664	58
3	03577	99936	03579	27,9372	57
4	03606	99935	03609	7117	56
5	0,03635	0,99934	0'03638	27,4899	55
6	03664	99933	03667	2715	54
7	03693	99932	03696	0566	53
8	03723	99931	03725	26,8450	52
9	03752	99930	03754	6367	51
10	0,03781	0,99929	0,03783	26,4316	50
11	03810	99927	03812	2296	49
12	03839	99926	03842	0307	48
13	03868	99925	03871	25,8348	47
14	03897	99924	03900	6418	46
15	0,03926	0,99923	0,03929	25,4517	45
16	03955	99922	03958	2644	44
17	03984	99921	03987	0798	43
18	04013	99919	04016	24,8978	42
19	04042	99918	04046	7185	41
20	0,04071	0,99917	0'04075	24,5418	40
21	04100	99916	04104	3675	39
22	04129	99915	04133	1957	38
23	04159	99913	04162	0263	37
24	04188	99912	04191	23,8593	36
25	0,04217	0,99911	0,04220	23,6945	35
26	04246	99910	04250	5321	34
27	04275	99909	04279	3718	33
28	04304	99907	04308	2137	32
29	04333	99906	04337	0577	31
30	0,04362	0,99905	0,04366	22,9038	30
31	04391	99904	04395	7519	29
32	04420	99902	04424	6020	28
33	04449	99901	04454	4541	27
34	04478	99900	04483	3081	26
35	0,04507	0,99898	0,04512	22,1640	25
36	04536	99897	04541	0217	24
37	04565	99896	04570	21,8813	23
38	04594	99894	04599	7426	22
39	04623	99893	04628	6056	21
40	0,04653	0,99892	0,04658	21,4704	20
41	04682	99890	04687	3369	19
42	04711	99889	04716	2049	18
43	04740	99888	04745	0747	17
44	04769	99886	04774	20,9460	16
45	0,04798	0,99885	0'04803	20,8188	15
46	04827	99883	04833	6932	14
47	04856	99882	04862	5691	13
48	04885	99881	04891	4465	12
49	04914	99879	04920	3253	11
50	0,04943	0,99878	0'04949	20,2056	10
51	04972	99876	04978	0872	9
52	05001	99875	05007	19,9702	8
53	05030	99873	05037	8546	7
54	05059	99872	05066	7403	6
55	0,05088	0,99870	0'05095	19,6273	5
56	05117	99869	05124	5156	4
57	05146	99867	05153	4051	3
58	05175	99866	05182	2959	2
59	05205	99864	05212	1879	1
60	0,05234	0,99863	0'05241	19,0811	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

87°

3°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,05234	0,99863	0'05241	19,0811	60
1	05263	99861	05270	18,9755	59
2	05292	99860	05299	8711	58
3	05321	99858	05328	7678	57
4	05350	99857	05357	6656	56
5	0,05379	0,99855	0,05387	18,5645	55
6	05408	99854	05416	4645	54
7	05437	99852	05445	3655	53
8	05466	99851	05474	2677	52
9	05495	99849	05503	1708	51
10	0,05524	0,99847	0'05533	18,0750	50
11	05553	99846	05562	17,9802	49
12	05582	99844	05591	8863	48
13	05611	99842	05620	7934	47
14	05640	99841	05649	7015	46
15	0,05669	0,99839	0,05678	17,6106	45
16	05698	99838	05708	5205	44
17	05727	99836	05737	4314	43
18	05756	99834	05766	3432	42
19	05785	99833	05795	2558	41
20	0,05814	0,99831	0,05824	17,1693	40
21	05844	99829	05854	0837	39
22	05873	99827	05883	16,9990	38
23	05902	99826	05912	9150	37
24	05931	99824	05941	8319	36
25	0,05960	0,99822	0,05970	16,7496	35
26	05989	99821	05999	6681	34
27	06018	99819	06029	5874	33
28	06047	99817	06058	5075	32
29	06076	99815	06087	4283	31
30	0,06105	0,99813	0,06116	16,3499	30
31	06134	99812	06145	2722	29
32	06163	99810	06175	1952	28
33	06192	99808	06204	1190	27
34	06221	99806	06233	0435	26
35	0,06250	0,99804	0'06262	15,9687	25
36	06279	99803	06291	8945	24
37	06308	99801	06321	8211	23
38	06337	99799	06350	7483	22
39	06366	99797	06379	6762	21
40	0,06395	0,99795	0,06408	15,6048	20
41	06424	99793	06438	5340	19
42	06453	99792	06467	4638	18
43	06482	99790	06496	3943	17
44	06511	99788	06525	3254	16
45	0,06540	0,99786	0,06554	15,2571	15
46	06569	99784	06584	1893	14
47	06598	99782	06613	1222	13
48	06627	99780	06642	0557	12
49	06656	99778	06671	14,9898	11
50	0,06685	0,99776	0,06700	14,9244	10
51	06714	99774	06730	8596	9
52	06743	99772	06759	7954	8
53	06773	99770	06788	7317	7
54	06802	99768	06817	6685	6
55	0,06831	0,99766	0,06847	14,6059	5
56	06860	99764	06876	5438	4
57	06889	99762	06905	4823	3
58	06918	99760	06934	4212	2
59	06947	99758	06963	3607	1
60	0,06976	0,99756	0,06993	14,3007	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

86°

4°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,06976	0,99756	0,06993	14.3007	60
1	07005	99754	07022	2411	59
2	07034	99752	07051	1821	58
3	07063	99750	07080	1235	57
4	07092	99748	07110	0655	56
5	0,07121	0,99746	0,07139	14,0079	55
6	07150	99744	07168	13,9507	54
7	07179	99742	07197	8940	53
8	07208	99740	07227	8378	52
9	07237	99738	07256	7821	51
10	0,07266	0,99736	0,07285	13,7267	50
11	07295	99734	07314	6719	49
12	07324	99731	07344	6174	48
13	07353	99729	07373	5634	47
14	07382	99727	07402	5098	46
15	0,07411	0,99725	0,07431	13,4566	45
16	07440	99723	07461	4039	44
17	07469	99721	07490	3515	43
18	07498	99719	07519	2996	42
19	07527	99716	07548	2480	41
20	0,07556	0,99714	0,07578	13,1969	40
21	07585	99712	07607	1461	39
22	07614	99710	07636	0958	38
23	07643	99708	07665	0458	37
24	07672	99705	07695	12,9962	36
25	0,07701	0,99703	0,07724	12,9469	35
26	07730	99701	07753	8981	34
27	07759	99699	07782	8496	33
28	07788	99696	07812	8014	32
29	07817	99694	07841	7536	31
30	0,07846	0,99692	0,07870	12,7062	30
31	07875	99689	07899	6591	29
32	07904	99687	07929	6124	28
33	07933	99685	07958	5660	27
34	07962	99683	07987	5199	26
35	0,07991	0,99680	0,08017	12,4742	25
36	08020	99678	08046	4288	24
37	08049	99676	08075	3838	23
38	08078	99673	08104	3390	22
39	08107	99671	08134	2946	21
40	0,08136	0,99668	0,08163	12,2505	20
41	08165	99666	08192	2067	19
42	08194	99664	08221	1632	18
43	08223	99661	08251	1201	17
44	08252	99659	08280	0772	16
45	0,08281	0,99657	0,08309	12,0346	15
46	08310	99654	08339	11,9923	14
47	08339	99652	08368	9504	13
48	08368	99649	08397	9087	12
49	08397	99647	08427	8673	11
50	0,08426	0,99644	0,08456	11,8262	10
51	08455	99642	08485	7853	9
52	08484	99639	08514	7448	8
53	08513	99637	08544	7045	7
54	08542	99635	08573	6645	6
55	0,08571	0,99632	0,08602	11,6248	5
56	08600	99630	08632	5853	4
57	08629	99627	08661	5461	3
58	08658	99625	08690	5072	2
59	08687	99622	08720	4685	1
60	0,08716	0,99619	0,08749	11,4301	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

85°

5°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,08716	0,99619	0,08749	11,4301	60
1	08745	99617	08778	3919	59
2	08774	99614	08807	3540	58
3	08803	99612	08837	3163	57
4	08831	99609	08866	2789	56
5	0,08860	0,99607	0,08895	11,2417	55
6	08889	99604	08925	2048	54
7	08918	99602	08954	1681	53
8	08947	99599	08983	1316	52
9	08976	99596	09013	0954	51
10	0,09005	0,99594	0,09042	11,0594	50
11	09034	99591	09071	0237	49
12	09063	99588	09101	10,9881	48
13	09092	99586	09130	9529	47
14	09121	99583	09159	9178	46
15	0,09150	0,99580	0,09189	10,8829	45
16	09179	99578	09218	8483	44
17	09208	99575	09247	8139	43
18	09237	99572	09277	7797	42
19	09266	99570	09306	7457	41
20	0,09295	0,99567	0,09335	10,7119	40
21	09324	99564	09365	6783	39
22	09353	99562	09394	6450	38
23	09382	99559	09423	6118	37
24	09411	99556	09453	5789	36
25	0,09440	0,99553	0,09482	10,5462	35
26	09469	99551	09511	5136	34
27	09498	99548	09541	4813	33
28	09527	99545	09570	4491	32
29	09556	99542	09600	4172	31
30	0,09585	0,99540	0,09629	10,3854	30
31	09614	99537	09658	3538	29
32	09642	99534	09688	3224	28
33	09671	99531	09717	2913	27
34	09700	99528	09746	2602	26
35	0,09729	0,99526	0,09776	10,2294	25
36	09758	99523	09805	1988	24
37	09787	99520	09834	1683	23
38	09816	99517	09864	1381	22
39	09845	99514	09893	1080	21
40	0,09874	0,99511	0,09923	10,0780	20
41	09903	99508	09952	0483	19
42	09932	99506	09981	0187	18
43	09961	99503	10011	9,9893	17
44	09990	99500	10040	9601	16
45	0,10019	0,99497	0,10069	9,9310	15
46	10048	99494	10099	9021	14
47	10077	99491	10128	8734	13
48	10106	99488	10158	8448	12
49	10135	99485	10187	8164	11
50	0,10164	0,99482	0,10216	9,7882	10
51	10192	99479	10246	7601	9
52	10221	99476	10275	7322	8
53	10250	99473	10305	7044	7
54	10279	99470	10334	6768	6
55	0,10308	0,99467	0,10363	9,6493	5
56	10337	99464	10393	6220	4
57	10366	99461	10422	5949	3
58	10395	99458	10452	5679	2
59	10424	99455	10481	5411	1
60	0,10453	0,99452	0,10510	9,5144	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

84°

6°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,10453	0'99452	0,10510	9,51436	60
1	10482	99449	10540	48781	59
2	10511	99446	10569	46141	58
3	10540	99443	10599	43515	57
4	10569	99440	10628	40904	56
5	0,10597	0,99437	0,10657	9,38307	55
6	10626	99434	10687	35724	54
7	10655	99431	10716	33155	53
8	10684	99428	10746	30599	52
9	10713	99424	10775	28058	51
10	0,10742	0,99421	0,10805	9,25530	50
11	10771	99418	10834	23016	49
12	10800	99415	10863	20516	48
13	10829	99412	10893	18028	47
14	10858	99409	10922	15554	46
15	0,10887	0,99406	0,10952	9,13093	45
16	10916	99402	10981	10646	44
17	10945	99399	11011	08211	43
18	10973	99396	11040	05789	42
19	11002	99393	11070	03379	41
20	0,11031	0,99390	0,11099	9,00983	40
21	11060	99386	11128	8,98598	39
22	11089	99383	11158	96227	38
23	11118	99380	11187	93867	37
24	11147	99377	11217	91520	36
25	0,11176	0,99374	0,11246	8,89185	35
26	11205	99370	11276	86862	34
27	11234	99367	11305	84551	33
28	11263	99364	11335	82252	32
29	11291	99360	11364	79964	31
30	0,11320	0,99357	0,11394	8,77689	30
31	11349	99354	11423	75425	29
32	11378	99351	11452	73172	28
33	11407	99347	11482	70931	27
34	11436	99344	11511	68701	26
35	0,11465	0,99341	0,11541	8,66482	25
36	11494	99337	11570	64275	24
37	11523	99334	11600	62078	23
38	11552	99331	11629	59893	22
39	11580	99327	11659	57718	21
40	0,11609	0,99324	0,11688	8,55555	20
41	11638	99320	11718	53402	19
42	11667	99317	11747	51259	18
43	11696	99314	11777	49128	17
44	11725	99310	11806	47007	16
45	0,11754	0,99307	0,11836	8,44896	15
46	11783	99303	11865	42795	14
47	11812	99300	11895	40705	13
48	11840	99297	11924	38625	12
49	11869	99293	11954	36555	11
50	0,11898	0,99290	0,11983	8,34496	10
51	11927	99286	12013	32446	9
52	11956	99283	12042	30406	8
53	11985	99279	12072	28376	7
54	12014	99276	12101	26355	6
55	0,12043	0,99272	0,12131	8,24345	5
56	12071	99269	12160	22344	4
57	12100	99265	12190	20352	3
58	12129	99262	12219	18370	2
59	12158	99258	12249	16398	1
60	0,12187	0,99255	0,12278	8,14435	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

83°

7°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,12187	0,99255	0,12278	8,14435	60
1	12216	99251	12308	12481	59
2	12245	99248	12338	10536	58
3	12274	99244	12367	08600	57
4	12302	99240	12397	06674	56
5	0,12331	0,99237	0,12426	8,04756	55
6	12360	99233	12456	02848	54
7	12389	99230	12485	00948	53
8	12418	99226	12515	7,99058	52
9	12447	99222	12544	97176	51
10	0,12476	0,99219	0,12574	7,95302	50
11	12504	99215	12603	93438	49
12	12533	99211	12633	91582	48
13	12562	99208	12662	89734	47
14	12591	99204	12692	87895	46
15	0,12620	0,99200	0,12722	7,86064	45
16	12649	99197	12751	84242	44
17	12678	99193	12781	82428	43
18	12706	99189	12810	80622	42
19	12735	99186	12840	78825	41
20	0,12764	0,99182	0,12869	7,77035	40
21	12793	99178	12899	75254	39
22	12822	99175	12929	73480	38
23	12851	99171	12958	71715	37
24	12880	99167	12988	69957	36
25	0,12908	0,99163	0,13017	7,68208	35
26	12937	99160	13047	66466	34
27	12966	99156	13076	64732	33
28	12995	99152	13106	63005	32
29	13024	99148	13136	61287	31
30	0,13053	0,99144	0,13165	7,59575	30
31	13081	99141	13195	57872	29
32	13110	99137	13224	56176	28
33	13139	99133	13254	54487	27
34	13168	99129	13284	52806	26
35	0,13197	0,99125	0,13313	7,51132	25
36	13226	99122	13343	49465	24
37	13254	99118	13372	47806	23
38	13283	99114	13402	46154	22
39	13312	99110	13432	44509	21
40	0,13341	0,99106	0,13461	7,42871	20
41	13370	99102	13491	41240	19
42	13399	99098	13521	39616	18
43	13427	99094	13550	37999	17
44	13456	99091	13580	36389	16
45	0,13485	0,99087	0,13609	7,34786	15
46	13514	99083	13639	33190	14
47	13543	99079	13669	31600	13
48	13572	99075	13698	30018	12
49	13600	99071	13728	28442	11
50	0,13629	0,99067	0,13758	7,26873	10
51	13658	99063	13787	25310	9
52	13687	99059	13817	23754	8
53	13716	99055	13846	22204	7
54	13744	99051	13876	20661	6
55	0,13773	0,99047	0,13906	7,19125	5
56	13802	99043	13935	17594	4
57	13831	99039	13965	16071	3
58	13860	99035	13995	14553	2
59	13889	99031	14024	13042	1
60	0,13917	0,99027	0,14054	7,11537	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

82°

8°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,13917	0,99027	0,14054	7,11537	60
1	13946	99023	14084	10038	59
2	13975	99019	14113	08546	58
3	14004	99015	14143	07059	57
4	14033	99011	14173	05579	56
5	0,14061	0,99006	0,14202	7,04105	55
6	14090	99002	14232	02637	54
7	14119	98998	14262	01174	53
8	14148	98994	14291	6,99718	52
9	14177	98990	14321	98268	51
10	0,14205	0,98986	0,14351	6,96823	50
11	14234	98982	14381	95385	49
12	14263	98978	14410	93952	48
13	14292	98973	14440	92525	47
14	14320	98969	14470	91104	46
15	0,14349	0,98965	0,14499	6,89688	45
16	14378	98961	14529	88278	44
17	14407	98957	14559	86874	43
18	14436	98953	14588	85475	42
19	14464	98948	14618	84082	41
20	0,14493	0,98944	0,14648	6,82694	40
21	14522	98940	14678	81312	39
22	14551	98936	14707	79936	38
23	14580	98931	14737	78564	37
24	14608	98927	14767	77199	36
25	0,14637	0,98923	0,14796	6,75838	35
26	14666	98919	14826	74483	34
27	14695	98914	14856	73133	33
28	14723	98910	14886	71789	32
29	14752	98906	14915	70450	31
30	0,14781	0,98902	0,14945	6,69116	30
31	14810	98897	14975	67787	29
32	14838	98893	15005	66463	28
33	14867	98889	15034	65144	27
34	14896	98884	15064	63831	26
35	0,14925	0,98880	0,15094	6,62523	25
36	14954	98876	15124	61219	24
37	14982	98871	15153	59921	23
38	15011	98867	15183	58627	22
39	15040	98863	15213	57339	21
40	0,15069	0,98858	0,15243	6,56055	20
41	15097	98854	15272	54777	19
42	15126	98849	15302	53503	18
43	15155	98845	15332	52234	17
44	15184	98841	15362	50970	16
45	0,15212	0,98836	0,15391	6,49710	15
46	15241	98832	15421	48456	14
47	15270	98827	15451	47206	13
48	15299	98823	15481	45961	12
49	15327	98818	15511	44720	11
50	0,15356	0,98814	0,15540	6,43484	10
51	15385	98809	15570	42253	9
52	15414	98805	15600	41026	8
53	15442	98800	15630	39804	7
54	15471	98796	15660	38587	6
55	0,15500	0,98791	0,15689	6,37374	5
56	15529	98787	15719	36165	4
57	15557	98782	15749	34961	3
58	15586	98778	15779	33761	2
59	15615	98773	15809	32566	1
60	0,15643	0,98769	0,15838	6,31375	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

81°

9°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,15643	0,98769	0,15838	6,31375	60
1	15672	98764	15868	30189	59
2	15701	98760	15898	29007	58
3	15730	98755	15928	27829	57
4	15758	98751	15958	26655	56
5	0,15787	0,98746	0,15988	6,25486	55
6	15816	98741	16017	24321	54
7	15845	98737	16047	23160	53
8	15873	98732	16077	22003	52
9	15902	98728	16107	20851	51
10	0,15931	0,98723	0,16137	6,19703	50
11	15959	98718	16167	18559	49
12	15988	98714	16196	17419	48
13	16017	98709	16226	16283	47
14	16046	98704	16256	15151	46
15	0,16074	0,98700	0,16286	6,14023	45
16	16103	98695	16316	12899	44
17	16132	98690	16346	11779	43
18	16160	98686	16376	10664	42
19	16189	98681	16405	09552	41
20	0,16218	0,98676	0,16435	6,08444	40
21	16246	98671	16465	07340	39
22	16275	98667	16495	06240	38
23	16304	98662	16525	05143	37
24	16333	98657	16555	04051	36
25	0,16361	0,98652	0,16585	6,02962	35
26	16390	98648	16615	01878	34
27	16419	98643	16645	00797	33
28	16447	98638	16674	5,99720	32
29	16476	98633	16704	98646	31
30	0,16505	0,98629	0,16734	5,97576	30
31	16533	98624	16764	96510	29
32	16562	98619	16794	95448	28
33	16591	98614	16824	94390	27
34	16620	98609	16854	93335	26
35	0,16648	0,98604	0,16884	5,92283	25
36	16677	98600	16914	91236	24
37	16706	98595	16944	90191	23
38	16734	98590	16974	89151	22
39	16763	98585	17004	88114	21
40	0,16792	0,98580	0,17033	5,87080	20
41	16820	98575	17063	86051	19
42	16849	98570	17093	85024	18
43	16878	98565	17123	84001	17
44	16906	98561	17153	82982	16
45	0,16935	0,98556	0,17183	5,81966	15
46	16964	98551	17213	80953	14
47	16992	98546	17243	79944	13
48	17021	98541	17273	78938	12
49	17050	98536	17303	77936	11
50	0,17078	0,98531	0,17333	5,76937	10
51	17107	98526	17363	75941	9
52	17136	98521	17393	74949	8
53	17164	98516	17423	73960	7
54	17193	98511	17453	72974	6
55	0,17222	0,98506	0,17483	5,71992	5
56	17250	98501	17513	71013	4
57	17279	98496	17543	70037	3
58	17308	98491	17573	69064	2
59	17336	98486	17603	68094	1
60	0,17365	0,98481	0,17633	5,67128	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

80°

10°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,17365	0,98481	0,17633	5,67128	60
1	17393	98476	17663	66165	59
2	17422	98471	17693	65205	58
3	17451	98466	17723	64248	57
4	17479	98461	17753	63295	56
5	0,17508	0,98455	0,17783	5,62344	55
6	17537	98450	17813	61397	54
7	17565	98445	17843	60452	53
8	17594	98440	17873	59511	52
9	17623	98435	17903	58573	51
10	0,17651	0,98430	0,17933	5,57638	50
11	17680	98425	17963	56706	49
12	17708	98420	17993	55777	48
13	17737	98414	18023	54851	47
14	17766	98409	18053	53927	46
15	0,17794	0,98404	0,18083	5,53007	45
16	17823	98399	18113	52090	44
17	17852	98394	18143	51176	43
18	17880	98389	18173	50264	42
19	17909	98383	18203	49356	41
20	0,17937	0,98378	0,18233	5,48451	40
21	17966	98373	18263	47548	39
22	17995	98368	18293	46648	38
23	18023	98362	18323	45751	37
24	18052	98357	18353	44857	36
25	0,18081	0,98352	0,18384	5,43966	35
26	18109	98347	18414	43078	34
27	18138	98341	18444	42192	33
28	18166	98336	18474	41309	32
29	18195	98331	18504	40429	31
30	0,18224	0,98325	0,18534	5,39552	30
31	18252	98320	18564	38677	29
32	18281	98315	18594	37805	28
33	18309	98310	18624	36936	27
34	18338	98304	18654	36070	26
35	0,18367	0,98299	0,18684	5,35206	25
36	18395	98294	18714	34345	24
37	18424	98288	18745	33487	23
38	18452	98283	18775	32631	22
39	18481	98277	18805	31778	21
40	0,18509	0,98272	0,18835	5,30928	20
41	18538	98267	18865	30080	19
42	18567	98261	18895	29235	18
43	18595	98256	18925	28393	17
44	18624	98250	18955	27553	16
45	0,18652	0,98245	0,18986	5,26715	15
46	18681	98240	19016	25880	14
47	18710	98234	19046	25048	13
48	18738	98229	19076	24218	12
49	18767	98223	19106	23391	11
50	0,18795	0,98218	0,19136	5,22566	10
51	18824	98212	19166	21744	9
52	18852	98207	19197	20925	8
53	18881	98201	19227	20107	7
54	18910	98196	19257	19293	6
55	0,18938	0,98190	0,19287	5,18480	5
56	18967	98185	19317	17671	4
57	18995	98179	19347	16863	3
58	19024	98174	19378	16058	2
59	19052	98168	19408	15256	1
60	0,19081	0,98163	0,19438	5,14455	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

79°

11°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,19081	0,98163	0,19438	5,14455	60
1	19109	98157	19468	13658	59
2	19138	98152	19498	12862	58
3	19167	98146	19529	12069	57
4	19195	98140	19559	11279	56
5	0,19224	0,98135	0,19589	5,10490	55
6	19252	98129	19619	09704	54
7	19281	98124	19649	08921	53
8	19309	98118	19680	08139	52
9	19338	98112	19710	07360	51
10	0,19366	0,98107	0,19740	5,06584	50
11	19395	98101	19770	05809	49
12	19423	98096	19801	05087	48
13	19452	98090	19831	04267	47
14	19481	98084	19861	03499	46
15	0,19509	0,98079	0,19891	5,02734	45
16	19538	98073	19921	01971	44
17	19566	98067	19952	01210	43
18	19595	98061	19982	00451	42
19	19623	98056	20012	4,99695	41
20	0,19652	0,98050	0,20042	4,98940	40
21	19680	98044	20073	98188	39
22	19709	98039	20103	97438	38
23	19737	98033	20133	96690	37
24	19766	98027	20164	95945	36
25	0,19794	0,98021	0,20194	4,95201	35
26	19823	98016	20224	94460	34
27	19851	98010	20254	93721	33
28	19880	98004	20285	92984	32
29	19908	97998	20315	92249	31
30	0,19937	0,97992	0,20345	4,91516	30
31	19965	97987	20376	90785	29
32	19994	97981	20406	90056	28
33	20022	97975	20436	89330	27
34	20051	97969	20466	88605	26
35	0,20079	0,97963	0,20497	4,87882	25
36	20108	97958	20527	87162	24
37	20136	97952	20557	86444	23
38	20165	97946	20588	85727	22
39	20193	97940	20618	85013	21
40	0,20222	0,97934	0,20648	4,84300	20
41	20250	97928	20679	83590	19
42	20279	97922	20709	82882	18
43	20307	97916	20739	82175	17
44	20336	97910	20770	81471	16
45	0,20364	0,97905	0,20800	4,80769	15
46	20393	97899	20830	80068	14
47	20421	97893	20861	79370	13
48	20450	97887	20891	78673	12
49	20478	97881	20921	77978	11
50	0,20507	0,97875	0,20952	4,77286	10
51	20535	97869	20982	76595	9
52	20563	97863	21013	75906	8
53	20592	97857	21043	75219	7
54	20620	97851	21073	74534	6
55	0,20649	0,97845	0,21104	4,73851	5
56	20677	97839	21134	73170	4
57	20706	97833	21164	72490	3
58	20734	97827	21195	71813	2
59	20763	97821	21225	71137	1
60	0,20791	0,97815	0,21256	4,70463	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

78°

12°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,20791	0,97815	0,21256	4,70463	60
1	20820	97809	21286	69791	59
2	20848	97803	21316	69121	58
3	20877	97797	21347	68452	57
4	20905	97791	21377	67786	56
5	0,20933	0,97784	0,21408	4,67121	55
6	20962	97778	21438	66458	54
7	20990	97772	21469	65797	53
8	21019	97766	21499	65138	52
9	21047	97760	21529	64480	51
10	0,21076	0,97754	0,21560	4,63825	50
11	21104	97748	21590	63171	49
12	21132	97742	21621	62518	48
13	21161	97735	21651	61868	47
14	21189	97729	21682	61219	46
15	0,21218	0,97723	0,21712	4,60572	45
16	21246	97717	21743	59927	44
17	21275	97711	21773	59283	43
18	21303	97705	21804	58641	42
19	21331	97698	21834	58001	41
20	0,21360	0,97692	0,21864	4,57363	40
21	21388	97686	21895	56726	39
22	21417	97680	21925	56091	38
23	21445	97673	21956	55458	37
24	21474	97667	21986	54826	36
25	0,21502	0,97661	0,22017	4,54196	35
26	21530	97655	22047	53568	34
27	21559	97648	22078	52941	33
28	21587	97642	22108	52316	32
29	21616	97636	22139	51693	31
30	0,21644	0,97630	0,22169	4,51071	30
31	21672	97623	22200	50451	29
32	21701	97617	22231	49832	28
33	21729	97611	22261	49215	27
34	21758	97604	22292	48600	26
35	0,21786	0,97598	0,22322	4,47986	25
36	21814	97592	22353	47374	24
37	21843	97585	22383	46764	23
38	21871	97579	22414	46155	22
39	21899	97573	22444	45548	21
40	0,21928	0,97566	0,22475	4,44942	20
41	21956	97560	22505	44338	19
42	21985	97553	22536	43735	18
43	22013	97547	22567	43134	17
44	22041	97541	22597	42534	16
45	0,22070	0,97534	0,22628	4,41936	15
46	22098	97528	22658	41340	14
47	22126	97521	22689	40745	13
48	22155	97515	22719	40152	12
49	22183	97508	22750	39560	11
50	0,22212	0,97502	0,22781	4,38969	10
51	22240	97496	22811	38381	9
52	22268	97489	22842	37793	8
53	22297	97483	22872	37207	7
54	22325	97476	22903	36623	6
55	0,22353	0,97470	0,22934	4,36040	5
56	22382	97463	22964	35459	4
57	22410	97457	22995	34879	3
58	22438	97450	23026	34300	2
59	22467	97444	23054	33723	1
60	0,22495	0,97437	0,23087	4,33148	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

77°

13°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,22495	0,97437	0,23087	4,33148	60
1	22523	97430	23117	32573	59
2	22552	97424	23148	32001	58
3	22580	97417	23179	31430	57
4	22608	97411	23209	30860	56
5	0,22637	0,97404	0,23240	4,30291	55
6	22665	97398	23271	29724	54
7	22693	97391	23301	29159	53
8	22722	97384	23332	28595	52
9	22750	97378	23363	28032	51
10	0,22778	0,97371	0,23393	4,27471	50
11	22807	97365	23424	26911	49
12	22835	97358	23455	26352	48
13	22863	97351	23485	25795	47
14	22892	97345	23516	25239	46
15	0,22920	0,97338	0,23547	4,24685	45
16	22948	97331	23578	24132	44
17	22977	97325	23608	23580	43
18	23005	97318	23639	23030	42
19	23033	97311	23670	22481	41
20	0,23062	0,97304	0,23700	4,21933	40
21	23090	97298	23731	21387	39
22	23118	97291	23762	20842	38
23	23146	97284	23793	20298	37
24	23175	97278	23823	19756	36
25	0,23203	0,97271	0,23854	4,19215	35
26	23231	97264	23885	18675	34
27	23260	97257	23916	18137	33
28	23288	97251	23946	17600	32
29	23316	97244	23977	17064	31
30	0,23345	0,97237	0,24008	4,16530	30
31	23373	97230	24039	15997	29
32	23401	97223	24069	15465	28
33	23429	97217	24100	14934	27
34	23458	97210	24131	14405	26
35	0,23486	0,97203	0,24162	4,13877	25
36	23514	97196	24193	13350	24
37	23542	97189	24223	12825	23
38	23571	97182	24254	12301	22
39	23599	97176	24285	11778	21
40	0,23627	0,97169	0,24316	4,11256	20
41	23656	97162	24347	10736	19
42	23684	97155	24377	10216	18
43	23712	97148	24408	09699	17
44	23740	97141	24439	09182	16
45	0,23769	0,97134	0,24470	4,08666	15
46	23797	97127	24501	08152	14
47	23825	97120	24532	07639	13
48	23853	97113	24562	07127	12
49	23882	97106	24593	06616	11
50	0,23910	0,97100	0,24624	4,06107	10
51	23938	97093	24655	05599	9
52	23966	97086	24686	05092	8
53	23995	97079	24717	04586	7
54	24023	97072	24747	04081	6
55	0,24051	0,97065	0,24778	4,03578	5
56	24079	97058	24809	03076	4
57	24108	97051	24840	02574	3
58	24136	97044	24871	02074	2
59	24164	97037	24902	01576	1
60	0,24192	0,97030	0,24933	4,01078	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

76°

14°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,24192	0,97030	0,24933	4,01078	60
1	24220	97023	24964	00582	59
2	24249	97015	24995	00086	58
3	24277	97008	25026	3,99592	57
4	24305	97001	25056	99099	56
5	0,24333	0,96994	0,25087	3,98607	55
6	24362	96987	25118	98117	54
7	24390	96980	25149	97627	53
8	24418	96973	25180	97139	52
9	24446	96966	25211	96651	51
10	0,24474	0,96959	0,25242	3,96165	50
11	24503	96952	25273	95680	49
12	24531	96945	25304	95196	48
13	24559	96937	25335	94713	47
14	24587	96930	25366	94232	46
15	0,24615	0,96923	0,25397	3,93751	45
16	24644	96916	25428	93271	44
17	24672	96909	25459	92793	43
18	24700	96902	25490	92316	42
19	24728	96894	25521	91839	41
20	0,24756	0,96887	0,25552	3,91364	40
21	24784	96880	25583	90890	39
22	24813	96873	25614	90417	38
23	24841	96866	25645	89945	37
24	24869	96858	25676	89474	36
25	0,24897	0,96851	0,25707	3,89004	35
26	24925	96844	25738	88536	34
27	24954	96837	25769	88068	33
28	24982	96829	25800	87601	32
29	25010	96822	25831	87136	31
30	0,25038	0,96815	0,25862	3,86671	30
31	25066	96807	25893	86208	29
32	25094	96800	25924	85745	28
33	25122	96793	25955	85284	27
34	25151	96786	25986	84824	26
35	0,25179	0,96778	0,26017	3,84364	25
36	25207	96771	26048	83906	24
37	25235	96764	26079	83449	23
38	25263	96756	26110	82992	22
39	25291	96749	26141	82537	21
40	0,25320	0,96742	0,26172	3,82083	20
41	25348	96734	26203	81630	19
42	25376	96727	26235	81177	18
43	25404	96719	26266	80726	17
44	25432	96712	26297	80276	16
45	0,25460	0,96705	0,26328	3,79827	15
46	25488	96697	26359	79378	14
47	25516	96690	26390	78931	13
48	25545	96682	26421	78485	12
49	25573	96675	26452	78040	11
50	0,25601	0,96667	0,26483	3,77595	10
51	25629	96660	26515	77152	9
52	25657	96653	26546	76709	8
53	25685	99645	26577	76268	7
54	25713	96638	26608	75828	6
55	0,25741	0,96630	0,26639	3,75388	5
56	25769	96623	26670	74950	4
57	25798	96615	26701	74512	3
58	25826	96608	26733	74075	2
59	25854	96600	26764	73640	1
60	0,25882	0,96593	0,26795	3,73205	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

75°

15°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,25882	0,96593	0,26795	3,73205	60
1	25910	96585	26826	72771	59
2	25938	96578	26857	72338	58
3	25966	96570	26888	71907	57
4	25994	96562	26920	71476	56
5	0,26022	0,96555	0,26951	3,71046	55
6	26050	96547	26982	70616	54
7	26079	96540	27013	70188	53
8	26107	96532	27044	69761	52
9	26135	96524	27076	69335	51
10	0,26163	0,96517	0,27107	3,68909	50
11	26191	96509	27138	68485	49
12	26219	96502	27169	68061	48
13	26247	96494	27201	67638	47
14	26275	96486	27232	67217	46
15	0,26303	0,96479	0,27263	3,66796	45
16	26331	96471	27294	66376	44
17	26359	96463	27326	65957	43
18	26387	96456	27357	65538	42
19	26415	96448	27388	65121	41
20	0,26443	0,96440	0,27419	3,64705	40
21	26471	96433	27451	64289	39
22	26500	96425	27482	63874	38
23	26528	96417	27513	63461	37
24	26556	96410	27545	63048	36
25	0,26584	0,96402	0,27576	3,62636	35
26	26612	96394	27607	62224	34
27	26640	96386	27638	61814	33
28	26668	96379	27670	61405	32
29	26696	96371	27701	60996	31
30	0,26724	0,96363	0,27732	3,60588	30
31	26752	96355	27764	60181	29
32	26780	96347	27795	59775	28
33	26808	96340	27826	59370	27
34	26836	96332	27858	58966	26
35	0,26864	0,96324	0,27889	3,58562	25
36	26892	96316	27921	58160	24
37	26920	96308	27952	57758	23
38	26948	96301	27983	57357	22
39	26976	96293	28015	56957	21
40	0,27004	0,96285	0,28046	3,56557	20
41	27032	96277	28077	56159	19
42	27060	96269	28109	55761	18
43	27088	96261	28140	55364	17
44	27116	96253	28172	54968	16
45	0,27144	0,96246	0,28203	3,54573	15
46	27172	96238	28234	54179	14
47	27200	96230	28266	53785	13
48	27228	96222	28297	53393	12
49	27256	96214	28329	53001	11
50	0,27284	0,96206	0,28360	3,52609	10
51	27312	96198	28391	52219	9
52	27340	96190	28423	51829	8
53	27368	96182	28454	51441	7
54	27396	96174	28486	51053	6
55	0,27424	0,96166	0,28517	3,50666	5
56	27452	96158	28549	50279	4
57	27480	96150	28580	49894	3
58	27508	96142	28612	49509	2
59	27536	96134	28643	49125	1
60	0,27564	0,96126	0,28675	3,48741	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

74°

16°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,27564	0,96126	0,28675	3,48741	60
1	27592	96118	28706	48359	59
2	27620	96110	28738	47977	58
3	27648	96102	28769	47596	57
4	27676	96094	28801	47216	56
5	0,27704	0,96086	0,28832	3,46837	55
6	27731	96078	28864	46458	54
7	27759	96070	28895	46080	53
8	27787	96062	28927	45703	52
9	27815	96054	28958	45327	51
10	0,27843	0,96046	0,28990	3,44951	50
11	27871	96037	29021	44576	49
12	27899	96029	29053	44202	48
13	27927	96021	29084	43829	47
14	27955	96013	29116	43456	46
15	0,27983	0,96005	0,29147	3,43084	45
16	28011	95997	29179	42713	44
17	28039	95989	29210	42343	43
18	28067	95981	29242	41973	42
19	28095	95972	29274	41604	41
20	0,28123	0,95964	0,29305	3,41236	40
21	28150	95956	29337	40869	39
22	28178	95948	29368	40502	38
23	28206	95940	29400	40136	37
24	28234	95931	29432	39771	36
25	0,28262	0,95923	0,29463	3,39406	35
26	28290	95915	29495	39042	34
27	28318	95907	29526	38679	33
28	28346	95898	29558	38317	32
29	28374	95890	29590	37955	31
30	0,28402	0,95882	0,29621	3,37594	30
31	28429	95874	29653	37234	29
32	28457	95865	29685	36875	28
33	28485	95857	29716	36516	27
34	28513	95849	29748	36158	26
35	0,28541	0,95841	0,29780	3,35800	25
36	28569	95832	29811	35443	24
37	28597	95824	29843	35087	23
38	28625	95816	29875	34732	22
39	28652	95807	29906	34377	21
40	0,28680	0,95799	0,29938	3,34023	20
41	28708	95791	29970	33670	19
42	28736	95782	30001	33317	18
43	28764	95774	30033	32965	17
44	28792	95766	30065	32614	16
45	0,28820	0,95757	0,30097	3,32264	15
46	28847	95749	30128	31914	14
47	28875	95740	30160	31565	13
48	28903	95732	30192	31216	12
49	28931	95724	30224	30868	11
50	0,28959	0,95715	0,30255	3,30521	10
51	28987	95707	30287	30174	9
52	29015	95698	30319	29829	8
53	29042	95690	30351	29483	7
54	29070	95681	30382	29139	6
55	0,29098	0,95673	0,30414	3,28795	5
56	29126	95664	30446	28452	4
57	29154	95656	30478	28109	3
58	29182	95647	30509	27767	2
59	29209	95639	30541	27426	1
60	0,29237	0,95630	0,30573	3,27085	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

73°

17°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,29237	0,95630	0,30573	3,27085	60
1	29265	95622	30605	26745	59
2	29293	95613	30637	26406	58
3	29321	95605	30669	26067	57
4	29348	95596	30700	25729	56
5	0,29376	0,95588	0,30732	3,25392	55
6	29404	95579	30764	25055	54
7	29432	95571	30796	24719	53
8	29460	95562	30828	24383	52
9	29487	95554	30860	24049	51
10	0,29515	0,95545	0,30891	3,23714	50
11	29543	95536	30923	23381	49
12	29571	95528	30955	23048	48
13	29599	95519	30987	22715	47
14	29626	95511	31019	22384	46
15	0,29654	0,95502	0,31051	3,22053	45
16	29682	95493	31083	21722	44
17	29710	95485	31115	21392	43
18	29737	95476	31147	21063	42
19	29765	95467	31178	20734	41
20	0,29793	0,95459	0,31210	3,20406	40
21	29821	95450	31242	20079	39
22	29849	95441	31274	19752	38
23	29876	95433	31306	19426	37
24	29904	95424	31338	19100	36
25	0,29932	0,95415	0,31370	3,18775	35
26	29960	95407	31402	18451	34
27	29987	95398	31434	18127	33
28	30015	95389	31466	17804	32
29	30043	95380	31498	17481	31
30	0,30071	0,95372	0,31530	3,17159	30
31	30098	95363	31562	16838	29
32	30126	95354	31594	16517	28
33	30154	95345	31626	16197	27
34	30182	95337	31658	15877	26
35	0,30209	0,95328	0,31690	3,15558	25
36	30237	95319	31722	15240	24
37	30265	95310	31754	14922	23
38	30292	95301	31786	14605	22
39	30320	95293	31818	14288	21
40	0,30348	0,95284	0,31850	3,13972	20
41	30376	95275	31882	13656	19
42	30403	95266	31914	13341	18
43	30431	95257	31946	13027	17
44	30459	95248	31978	12713	16
45	0,30486	0,95240	0,32010	3,12400	15
46	30514	95231	32042	12087	14
47	30542	95222	32074	11775	13
48	30570	95213	32106	11464	12
49	30597	95204	32139	11153	11
50	0,30625	0,95195	0,32171	3,10842	10
51	30653	95186	32203	10532	9
52	30680	95177	32235	10223	8
53	30708	95168	32267	09914	7
54	30736	95159	32299	09606	6
55	0,30763	0,95150	0,32331	3,09298	5
56	30791	95142	32363	08991	4
57	30819	95133	32396	08685	3
58	30846	95124	32428	08379	2
59	30874	95115	32460	08073	1
60	0,30902	0,95106	0,32492	3,07768	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

72°

18°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,30902	0,95106	0,32492	3,07768	60
1	30929	95097	32524	07464	59
2	30957	95088	32556	07160	58
3	30985	95079	32588	06857	57
4	31012	95070	32621	06554	56
5	0,31040	0,95061	0,32653	3,06252	55
6	31068	95052	32685	05950	54
7	31095	95043	32717	05649	53
8	31123	95033	32749	05349	52
9	31151	95024	32782	05049	51
10	0,31178	0,95015	0,32814	3,04749	50
11	31206	95006	32846	04450	49
12	31233	94997	32878	04152	48
13	31261	94988	32911	03854	47
14	31289	94979	32943	03556	46
15	0,31316	0,94970	0,32975	3,03260	45
16	31344	94961	33007	02963	44
17	31372	94952	33040	02667	43
18	31399	94943	33072	02372	42
19	31427	94933	33104	02077	41
20	0,31454	0,94924	0,33136	3,01783	40
21	31482	94915	33169	01489	39
22	31510	94906	33201	01196	38
23	31537	94897	33233	00903	37
24	31565	94888	33266	00611	36
25	0,31593	0,94878	0,33298	3,00319	35
26	31620	94869	33330	00028	34
27	31648	94860	33363	2,99738	33
28	31675	94851	33395	99447	32
29	31703	94842	33427	99158	31
30	0,31730	0,94832	0,33460	2,98868	30
31	31758	94823	33492	98580	29
32	31786	94814	33524	98292	28
33	31813	94805	33557	98004	27
34	31841	94795	33589	97717	26
35	0,31868	0,94786	0,33621	2,97430	25
36	31896	94777	33654	97144	24
37	31923	94768	33686	96858	23
38	31951	94758	33718	96573	22
39	31979	94749	33751	96288	21
40	0,32006	0,94740	0,33783	2,96004	20
41	32034	94730	33816	95721	19
42	32061	94721	33848	95437	18
43	32089	94712	33881	95155	17
44	32116	94702	33913	94872	16
45	0,32144	0,94693	0,33945	2,94590	15
46	32171	94684	33978	94309	14
47	32199	94674	34010	94028	13
48	32227	94665	34043	93748	12
49	32254	94656	34075	93468	11
50	0,32282	0,94646	0,34108	2,93189	10
51	32309	94637	34140	92910	9
52	32337	94627	34173	92632	8
53	32364	94618	34205	92354	7
54	32392	94609	34238	92076	6
55	0,32419	0,94599	0,34270	2,91799	5
56	32447	94590	34303	91523	4
57	32474	94580	34335	91246	3
58	32502	94571	34368	90971	2
59	32529	94561	34400	90696	1
60	0,32557	0,94552	0,34433	2,90421	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

19°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,32557	0,94552	0,34433	2,90421	60
1	32584	94542	34465	90147	59
2	32612	94533	34498	89873	58
3	32639	94523	34530	89600	57
4	32667	94514	34563	89327	56
5	0,32694	0,94504	0,34596	2,89055	55
6	32722	94495	34628	88783	54
7	32749	94485	34661	88511	53
8	32777	94476	34693	88240	52
9	32804	94466	34726	87970	51
10	0,32832	0,94457	0,34758	2,87700	50
11	32859	94447	34791	87430	49
12	32887	94438	34824	87161	48
13	32914	94428	34856	86892	47
14	32942	94418	34889	86624	46
15	0,32969	0,94409	0,34922	2,86356	45
16	32997	94399	34954	86089	44
17	33024	94390	34987	85822	43
18	33051	94380	35020	85555	42
19	33079	94370	35052	85289	41
20	0,33106	0,94361	0,35085	2,85023	40
21	33134	94351	35118	84758	39
22	33161	94342	35150	84494	38
23	33189	94332	35183	84229	37
24	33216	94322	35216	83965	36
25	0,33244	0,94313	0,35248	2,83702	35
26	33271	94303	35281	83439	34
27	33298	94293	35314	83176	33
28	33326	94284	35346	82914	32
29	33353	94274	35379	82653	31
30	0,33381	0,94264	0,35412	2,82391	30
31	33408	94254	35445	82130	29
32	33436	94245	35477	81870	28
33	33463	94235	35510	81610	27
34	33490	94225	35543	81350	26
35	0,33518	0,94215	0,35576	2,81091	25
36	33545	94206	35608	80833	24
37	33573	94196	35641	80574	23
38	33600	94186	35674	80316	22
39	33627	94176	35707	80059	21
40	0,33655	0,94167	0,35740	2,79802	20
41	33682	94157	35772	79545	19
42	33710	94147	35805	79289	18
43	33737	94137	35838	79033	17
44	33764	94127	35871	78778	16
45	0,33792	0,94118	0,35904	2,78523	15
46	33819	94108	35937	78269	14
47	33846	94098	35969	78014	13
48	33874	94088	36002	77761	12
49	33901	94078	36035	77507	11
50	0,33929	0,94068	0,36068	2,77254	10
51	33956	94058	36101	77002	9
52	33983	94049	36134	76750	8
53	34011	94039	36167	76498	7
54	34038	94029	36199	76247	6
55	0,34065	0,94019	0,36232	2,75996	5
56	34093	94009	36265	75746	4
57	34120	93999	36298	75496	3
58	34147	93989	36331	75246	2
59	34175	93979	36364	74997	1
60	0,34202	0,93969	0,36397	2,74748	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

71° 70°

20°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,34202	0,93969	0,36397	2,74748	60
1	34229	93959	36430	74499	59
2	34257	93949	36463	74251	58
3	34284	93939	36496	74004	57
4	34311	93929	36529	73756	56
5	0,34339	0,93919	0,36562	2,73509	55
6	34366	93909	36595	73263	54
7	34393	93899	36628	73017	53
8	34421	93889	36661	72771	52
9	34448	93879	36694	72526	51
10	0,34475	0,93869	0,36727	2,72281	50
11	34503	93859	36760	72036	49
12	34530	93849	36793	71792	48
13	34557	93839	36826	71548	47
14	34584	93829	36859	71305	46
15	0,34612	0,93819	0,36892	2,71062	45
16	34639	93809	36925	70819	44
17	34666	93799	36958	70577	43
18	34694	93789	36991	70335	42
19	34721	93779	37024	70094	41
20	0,34748	0,93769	0,37057	2,69853	40
21	34775	93759	37090	69612	39
22	34803	93748	37123	69371	38
23	34830	93738	37157	69131	37
24	34857	93728	37190	68892	36
25	0,34884	0,93718	0,37223	2,68653	35
26	34912	93708	37256	68414	34
27	34939	93698	37289	68175	33
28	34966	93688	37322	67937	32
29	34993	93677	37355	67700	31
30	0,35021	0,93667	0,37388	2,67462	30
31	35048	93657	37422	67225	29
32	35075	93647	37455	66989	28
33	35102	93637	37488	66752	27
34	35130	93626	37521	66516	26
35	0,35157	0,93616	0,37554	2,66281	25
36	35184	93606	37588	66046	24
37	35211	93596	37621	65811	23
38	35239	93585	37654	65576	22
39	35266	93575	37687	65342	21
40	0,35293	0,93565	0,37720	2,65109	20
41	35320	93555	37754	64875	19
42	35347	93544	37787	64642	18
43	35375	93534	37820	64410	17
44	35402	93524	37853	64177	16
45	0,35429	0,93514	0,37887	2,63945	15
46	35456	93503	37920	63714	14
47	35484	93493	37953	63483	13
48	35511	93483	37986	63252	12
49	35538	93472	38020	63021	11
50	0,35565	0,93462	0,38053	2,62791	10
51	35592	93452	38086	62561	9
52	35619	93441	38120	62332	8
53	35647	93431	38153	62103	7
54	35674	93420	38186	61874	6
55	0,35701	0,93410	0,38220	2,61646	5
56	35728	93400	38253	61418	4
57	35755	93389	38286	61190	3
58	35782	93379	38320	60963	2
59	35810	93368	38353	60736	1
60	0,35837	0,93358	0,38386	2,60509	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

69°

21°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,35837	0,93358	0,38386	2,60509	60
1	35864	93348	38420	60283	59
2	35891	93337	38453	60057	58
3	35918	93327	38487	59831	57
4	35945	93316	38520	59606	56
5	0,35973	0,93306	0,38553	2,59381	55
6	36000	93295	38587	59156	54
7	36027	93285	38620	58932	53
8	36054	93274	38654	58708	52
9	36081	93264	38687	58484	51
10	0,36108	0,93253	0,38721	2,58261	50
11	36135	93243	38754	58038	49
12	36162	93232	38787	57815	48
13	36190	93222	38821	57593	47
14	36217	93211	38854	57371	46
15	0,36244	0,93201	0,38888	2,57150	45
16	36271	93190	38921	56928	44
17	36298	93180	38955	56707	43
18	36325	93169	38988	56487	42
19	36352	93159	39022	56266	41
20	0,36379	0,93148	0,39055	2,56046	40
21	36406	93137	39089	55827	39
22	36434	93127	39122	55608	38
23	36461	93116	39156	55389	37
24	36488	93106	39190	55170	36
25	0,36515	0,93095	0,39223	2,54952	35
26	36542	93084	39257	54734	34
27	36569	93074	39290	54516	33
28	36596	93063	39324	54299	32
29	36623	93052	39357	54082	31
30	0,36650	0,93042	0,39391	2,53865	30
31	36677	93031	39425	53648	29
32	36704	93020	39458	53432	28
33	36731	93010	39492	53217	27
34	36758	92999	39526	53001	26
35	0,36785	0,92988	0,39559	2,52786	25
36	36812	92978	39593	52571	24
37	36839	92967	39626	52357	23
38	36867	92956	39660	52142	22
39	36894	92945	39694	51929	21
40	0,36921	0,92935	0,39727	2,51715	20
41	36948	92924	39761	51502	19
42	36975	92913	39795	51289	18
43	37002	92902	39829	51076	17
44	37029	92892	39862	50864	16
45	0,37056	0,92881	0,39896	2,50652	15
46	37083	92870	39930	50440	14
47	37110	92859	39963	50229	13
48	37137	92849	39997	50018	12
49	37164	92838	40031	49807	11
50	0,37191	0,92827	0,40065	2,49597	10
51	37218	92816	40098	49386	9
52	37245	92805	40132	49177	8
53	37272	92794	40166	48967	7
54	37299	92784	40200	48758	6
55	0,37326	0,92773	0,40234	2,48549	5
56	37353	92762	40267	48340	4
57	37380	92751	40301	48132	3
58	37407	92740	40335	47924	2
59	37434	92729	40369	47716	1
60	0,37461	0,92718	0,40403	2,47509	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

68°

22°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,37461	0,92718	0,40403	2,47509	60
1	37488	92707	40436	47302	59
2	37515	92697	40470	47095	58
3	37542	92686	40504	46888	57
4	37569	92675	40538	46682	56
5	0,37595	0,92664	0,40572	2,46476	55
6	37622	92653	40606	46270	54
7	37649	92642	40640	46065	53
8	37676	92631	40674	45860	52
9	37703	92620	40707	45655	51
10	0,37730	0,92609	0,40741	2,45451	50
11	37757	92598	40775	45246	49
12	37784	92587	40809	45043	48
13	37811	92576	40843	44839	47
14	37838	92565	40877	44636	46
15	0,37865	0,92554	0,40911	2,44433	45
16	37892	92543	40945	44230	44
17	37919	92532	40979	44027	43
18	37946	92521	41013	43825	42
19	37973	92510	41047	43623	41
20	0,37999	0,92499	0,41081	2,43422	40
21	38026	92488	41115	43220	39
22	38053	92477	41149	43019	38
23	38080	92466	41183	42819	37
24	38107	92455	41217	42618	36
25	0,38134	0,92444	0,41251	2,42418	35
26	38161	92432	41285	42218	34
27	38188	92421	41319	42019	33
28	38215	92410	41353	41819	32
29	38241	92399	41387	41620	31
30	0,38268	0,92388	0,41421	2,41421	30
31	38295	92377	41455	41223	29
32	38322	92366	41490	41025	28
33	38349	92355	41524	40827	27
34	38376	92343	41558	40629	26
35	0,38403	0,92332	0,41592	2,40432	25
36	38430	92321	41626	40235	24
37	38456	92310	41660	40038	23
38	38483	92299	41694	39841	22
39	38510	92287	41728	39645	21
40	0,38537	0,92276	0,41763	2,39449	20
41	38564	92265	41797	39253	19
42	38591	92254	41831	39058	18
43	38617	92243	41865	38863	17
44	38644	92231	41899	38668	16
45	0,38671	0,92220	0 41933	2,38473	15
46	38698	92209	41968	38279	14
47	38725	92198	42002	38084	13
48	38752	92186	42036	37891	12
49	38778	92175	42070	37697	11
50	0,38805	0,92164	0,42105	2,37504	10
51	38832	92152	42139	37311	9
52	38859	92141	42173	37118	8
53	38886	92130	42207	36925	7
54	38912	92119	42242	36733	6
55	0,38939	0,92107	0,42276	2,36541	5
56	38966	92096	42310	36349	4
57	38993	92085	42345	36158	3
58	39020	92073	42379	35967	2
59	39046	92062	42413	35776	1
60	0,39073	0,92050	0,42447	2,35585	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

67°

23°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,39073	0,92050	0,42447	2,35585	60
1	39100	92039	42482	35395	59
2	39127	92028	42516	35205	58
3	39153	92016	42551	35015	57
4	39180	92005	42585	34825	56
5	0,39207	0,91994	0,42619	2,34636	55
6	39234	91982	42654	34447	54
7	39260	91971	42688	34258	53
8	39287	91959	42722	34069	52
9	39314	91948	42757	33881	51
10	0,39341	0,91936	0,42791	2,33693	50
11	39367	91925	42826	33505	49
12	39394	91914	42860	33317	48
13	39421	91902	42894	33130	47
14	39448	91891	42929	32943	46
15	0,39474	0,91879	0,42963	2,32756	45
16	39501	91868	42998	32570	44
17	39528	91856	43032	32383	43
18	39555	91845	43067	32197	42
19	39581	91833	43101	32012	41
20	0,39608	0,91822	0,43136	2,31826	40
21	39635	91810	43170	31641	39
22	39661	91799	43205	31456	38
23	39688	91787	43239	31271	37
24	39715	91775	43274	31086	36
25	0,39741	0,91764	0,43308	2,30902	35
26	39768	91752	43343	30718	34
27	39795	91741	43378	30534	33
28	39822	91729	43412	30351	32
29	39848	91718	43447	30167	31
30	0,39875	0,91706	0,43481	2,29984	30
31	39902	91694	43516	29801	29
32	39928	91683	43550	29619	28
33	39955	91671	43585	29437	27
34	39982	91660	43620	29254	26
35	0,40008	0,91648	0,43654	2,29073	25
36	40035	91636	43689	28891	24
37	40062	91625	43724	28710	23
38	40088	91613	43758	28528	22
39	40115	91601	43793	28348	21
40	0,40141	0,91590	0,43828	2,28167	20
41	40168	91578	43862	27987	19
42	40195	91566	43897	27806	18
43	40221	91555	43932	27626	17
44	40248	91543	43966	27447	16
45	0,40275	0,91531	0,44001	2,27267	15
46	40301	91519	44036	27088	14
47	40328	91508	44071	26909	13
48	40355	91496	44105	26730	12
49	40381	91484	44140	26552	11
50	0,40408	0,91472	0,44175	2,26374	10
51	40434	91461	44210	26196	9
52	40461	91449	44244	26018	8
53	40488	91437	44279	25840	7
54	40514	91425	44314	25663	6
55	0,40541	0,91414	0,44349	2,25486	5
56	40567	91402	44384	25309	4
57	40594	91390	44418	25132	3
58	40621	91378	44453	24956	2
59	40647	91366	44488	24780	1
60	0,40674	0,91355	0,44523	2,24604	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

66°

24°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,40674	0,91355	0,44523	2,24604	60
1	40700	91343	44558	24428	59
2	40727	91331	44593	24252	58
3	40753	91319	44627	24077	57
4	40780	91307	44662	23902	56
5	0,40806	0,91295	0,44697	2,23727	55
6	40833	91283	44732	23553	54
7	40860	91272	44767	23378	53
8	40886	91260	44802	23204	52
9	40913	91248	44837	23030	51
10	0,40939	0,91236	0,44872	2,22857	50
11	40966	91224	44907	22683	49
12	40992	91212	44942	22510	48
13	41019	91200	44977	22337	47
14	41045	91188	45012	22164	46
15	0,41072	0,91176	0,45047	2,21992	45
16	41098	91164	45082	21819	44
17	41125	91152	45117	21647	43
18	41151	91140	45152	21475	42
19	41178	91128	45187	21304	41
20	0,41204	0,91116	0,45222	2,21132	40
21	41231	91104	45257	20961	39
22	41257	91092	45292	20790	38
23	41284	91080	45327	20619	37
24	41310	91068	45362	20449	36
25	0,41337	0,91056	0,45397	2,20278	35
26	41363	91044	45432	20108	34
27	41390	91032	45467	19938	33
28	41416	91020	45502	19769	32
29	41443	91008	45538	19599	31
30	0,41469	0,90996	0,45573	2,19430	30
31	41496	90984	45608	19261	29
32	41522	90972	45643	19092	28
33	41549	90960	45678	18923	27
34	41575	90948	45713	18755	26
35	0,41602	0,90936	0,45748	2,18587	25
36	41628	90924	45784	18419	24
37	41655	90911	45819	18251	23
38	41681	90899	45854	18084	22
39	41707	90887	45889	17916	21
40	0,41734	0,90875	0,45924	2,17749	20
41	41760	90863	45960	17582	19
42	41787	90851	45995	17416	18
43	41813	90839	46030	17249	17
44	41840	90826	46065	17083	16
45	0,41866	0,90814	0,46101	2,16917	15
46	41892	90802	46136	16751	14
47	41919	90790	46171	16585	13
48	41945	90778	46206	16420	12
49	41972	90766	46242	16255	11
50	0,41998	0,90753	0,46277	2,16090	10
51	42024	90741	46312	15925	9
52	42051	90729	46348	15760	8
53	42077	90717	46383	15596	7
54	42104	90704	46418	15432	6
55	0,42130	0,90692	0,46454	2,15268	5
56	42156	90680	46489	15104	4
57	42183	90668	46525	14940	3
58	42209	90655	46560	14777	2
59	42235	90643	46595	14614	1
60	0,42262	0,90631	0,46631	2,14451	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

25°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,42262	0,90631	0,46631	2,14451	60
1	42288	90618	46666	14288	59
2	42315	90606	46702	14125	58
3	42341	90594	46737	13963	57
4	42367	90582	46772	13801	56
5	0,42394	0,90569	0,46808	2,13639	55
6	42420	90557	46843	13477	54
7	42446	90545	46879	13316	53
8	42473	90532	46914	13154	52
9	42499	90520	46950	12993	51
10	0,42525	0,90507	0,46985	2,12832	50
11	42552	90495	47021	12671	49
12	42578	90483	47056	12511	48
13	42604	90470	47092	12350	47
14	42631	90458	47128	12190	46
15	0,42657	0,90446	0,47163	2,12030	45
16	42683	90433	47199	11871	44
17	42709	90421	47234	11771	43
18	42736	90408	47270	11552	42
19	42762	90396	47305	11392	41
20	0,42788	0,90383	0,47341	2,11233	40
21	42815	90371	47377	11075	39
22	42841	90358	47412	10916	38
23	42867	90346	47448	10758	37
24	42894	90334	47483	10600	36
25	0,42920	0,90321	0,47519	2,10442	35
26	42946	90309	47555	10284	34
27	42972	90296	47590	10126	33
28	42999	90284	47626	09969	32
29	43025	90271	47662	09811	31
30	0,43051	0,90259	0,47698	2,09654	30
31	43077	90246	47733	09498	29
32	43104	90233	47769	09341	28
33	43130	90221	47805	09184	27
34	43156	90208	47840	09028	26
35	0,43182	0,90196	0,47876	2,08872	25
36	43209	90183	47912	08716	24
37	43235	90171	47948	08560	23
38	43261	90158	47984	08405	22
39	43287	90146	48019	08250	21
40	0,43313	0,90133	0,48055	2,08094	20
41	43340	90120	48091	07939	19
42	43366	90108	48127	07785	18
43	43392	90095	48163	07630	17
44	43418	90082	48198	07476	16
45	0,43445	0,90070	0,48234	2,07321	15
46	43471	90057	48270	07167	14
47	43497	90045	48306	07014	13
48	43523	90032	48342	06860	12
49	43549	90019	48378	06706	11
50	0,43575	0,90007	0,48414	2,06553	10
51	43602	89994	48450	06400	9
52	43628	89981	48486	06247	8
53	43654	89968	48521	06094	7
54	43680	89956	48557	05942	6
55	0,43706	0,89943	0,48593	2,05790	5
56	43733	89930	48629	05637	4
57	43759	89918	48665	05485	3
58	43785	89905	48701	05333	2
59	43811	89892	48737	05182	1
60	0,43837	0,89879	0,48773	2'05030	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

65° 64°

26°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,43837	0,89879	0,48773	2,05030	60
1	43863	89867	48809	04879	59
2	43889	89854	48845	04728	58
3	43916	89841	48881	04577	57
4	43942	89828	48917	04426	56
5	0,43968	0,89816	0,48953	2,04276	55
6	43994	89803	48989	04125	54
7	44020	89790	49026	03975	53
8	44046	89777	49062	03825	52
9	44072	89764	49098	03675	51
10	0,44098	0,89752	0,49134	2,03526	50
11	44124	89739	49170	03376	49
12	44151	89726	49206	03227	48
13	44177	89713	49242	03078	47
14	44203	89700	49278	02929	46
15	0,44229	0,89687	0,49315	2,02780	45
16	44255	89674	49351	02631	44
17	44281	89662	49387	02483	43
18	44307	89649	49423	02335	42
19	44333	89636	49459	02187	41
20	0,44359	0,89623	0,49495	2,02039	40
21	44385	89610	49532	01891	39
22	44411	89597	49568	01743	38
23	44437	89584	49604	01596	37
24	44464	89571	49640	01449	36
25	0,44490	0,89558	0'49677	2,01302	35
26	44516	89545	49713	01155	34
27	44542	89532	49749	01008	33
28	44568	89519	49786	00862	32
29	44594	89506	49822	00715	31
30	0,44620	0,89493	0,49858	2,00569	30
31	44646	89480	49894	00423	29
32	44672	89467	49931	00277	28
33	44698	89454	49967	00131	27
34	44724	89441	50004	1,99986	26
35	0,44750	0,89428	0,50040	1,99841	25
36	44776	89415	50076	99695	24
37	44802	89402	50113	99550	23
38	44828	89389	50149	99406	22
39	44854	89376	50185	99261	21
40	0,44880	0,89363	0,50222	1,99116	20
41	44906	89350	50258	98972	19
42	44932	89337	50295	98828	18
43	44958	89324	50331	98684	17
44	44984	89311	50368	98540	16
45	0,45010	0,89298	0,50404	1,98396	15
46	45036	89285	50441	98253	14
47	45062	89272	50477	98110	13
48	45088	89259	50514	97966	12
49	45114	89245	50550	97823	11
50	0,45140	0,89232	0,50587	1,97681	10
51	45166	89219	50623	97538	9
52	45192	89206	50660	97395	8
53	45218	89193	50696	97253	7
54	45243	89180	50733	97111	6
55	0,45269	0,89167	0,50769	1,96969	5
56	45295	89153	50806	96827	4
57	45321	89140	50843	96685	3
58	45347	89127	50879	96544	2
59	45373	89114	50916	96402	1
60	0,45399	0,89101	0,50953	1,96261	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

63°

27°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,45399	0,89101	0,50953	1,96261	60
1	45425	89087	50989	96120	59
2	45451	89074	51026	95979	58
3	45477	89061	51063	95838	57
4	45503	89048	51099	95698	56
5	0,45529	0,89035	0,51136	1,95557	55
6	45554	89021	51173	95417	54
7	45580	89008	51209	95277	53
8	45606	88995	51246	95137	52
9	45632	88981	51283	94997	51
10	0,45658	0,88968	0,51219	1,94858	50
11	45684	88955	51356	94718	49
12	45710	88942	51393	94579	48
13	45736	88928	51430	94440	47
14	45762	88915	51467	94301	46
15	0,45787	0,88902	0,51503	1,94162	45
16	45813	88888	51540	94023	44
17	45839	88875	51577	93885	43
18	45865	88862	51614	93746	42
19	45891	88848	51651	93608	41
20	0,45917	0,88835	0,51688	1,93470	40
21	45942	88822	51724	93332	39
22	45968	88808	51761	93195	38
23	45994	88795	51798	93057	37
24	46020	88782	51835	92920	36
25	0,46046	0,88768	0,51872	1,92782	35
26	46072	88755	51909	92645	34
27	46097	88741	51943	92508	33
28	46123	88728	51983	92371	32
29	46149	88715	52020	92235	31
30	0,46175	0,88701	0,52057	1,92098	30
31	46201	88688	52094	91962	29
32	46226	88674	52131	91826	28
33	46252	88661	52168	91690	27
34	46278	88647	52205	91554	26
35	0,46304	0,88634	0,52242	1,91418	25
36	46330	88620	52279	91282	24
37	46355	88607	52316	91147	23
38	46381	88593	52353	91012	22
39	46407	88580	52390	90876	21
40	0,46433	0,88566	0,52427	1,90741	20
41	46458	88553	52464	90607	19
42	46484	88539	52501	90472	18
43	46510	88526	52538	90337	17
44	46536	88512	52575	90203	16
45	0,46561	0,88499	0,52613	1,90069	15
46	46587	88485	52650	89935	14
47	46613	88472	52687	89801	13
48	46639	88458	52724	89667	12
49	46664	88445	52761	89533	11
50	0,46690	0,88431	0,52798	1,89400	10
51	46716	88417	52836	89266	9
52	46742	88404	52873	89133	8
53	46767	88390	52910	89000	7
54	46793	88377	52947	88867	6
55	0,46819	0,88363	0,52985	1,88734	5
56	46844	88349	53022	88602	4
57	46870	88336	53059	88469	3
58	46896	88322	53096	88337	2
59	46921	88308	53134	88205	1
60	0,46947	0,88295	0,53171	1,88073	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

62°

28°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,46947	0,88295	0,53171	1,88073	60
1	46973	88281	53208	87941	59
2	46999	88267	53246	87809	58
3	47024	88254	53283	87677	57
4	47050	88240	53320	87546	56
5	0,47076	0,88226	0,53358	1,87415	55
6	47101	88213	53395	87283	54
7	47127	88199	53432	87152	53
8	47153	88185	53470	87021	52
9	47178	88172	53507	86891	51
10	0,47204	0,88158	0,53545	1,86760	50
11	47229	88144	53582	86630	49
12	47255	88130	53620	86499	48
13	47281	88117	53657	86369	47
14	47306	88103	53694	86239	46
15	0,47332	0,88089	0,53732	1,86109	45
16	47358	88075	53769	85979	44
17	47383	88062	53807	85850	43
18	47409	88048	53844	85720	42
19	47434	88034	53882	85591	41
20	0,47460	0,88020	0,53920	1,85462	40
21	47486	88006	53957	85333	39
22	47511	87993	53995	85204	38
23	47537	87979	54032	85075	37
24	47562	87965	54070	84946	36
25	0,47588	0,87951	0,54107	1,84818	35
26	47614	87937	54145	84689	34
27	47639	87923	54183	84561	33
28	47665	87909	54220	84433	32
29	47690	87896	54258	84305	31
30	0,47716	0,87882	0,54296	1,84177	30
31	47741	87868	54333	84049	29
32	47767	87854	54371	83922	28
33	47793	87840	54409	83794	27
34	47818	87826	54446	83667	26
35	0,47844	0,87812	0,54484	1,83540	25
36	47869	87798	54522	83413	24
37	47895	87784	54560	83286	23
38	47920	87770	54597	83159	22
39	47946	87756	54635	83033	21
40	0,47971	0,87743	0,54673	1,82906	20
41	47997	87729	54711	82780	19
42	48022	87715	54748	82654	18
43	48048	87701	54786	82528	17
44	48073	87687	54824	82402	16
45	0,48099	0,87673	0,54862	1,82276	15
46	48124	87659	54900	82150	14
47	48150	87645	54938	82025	13
48	48175	87631	54975	81899	12
49	48201	87617	55013	81774	11
50	0,48226	0,87603	0,55051	1,81649	10
51	48252	87589	55089	81524	9
52	48277	87575	55127	81399	8
53	48303	87561	55165	81274	7
54	48328	87546	55203	81150	6
55	0,48354	0,87532	0,55241	1,81025	5
56	48379	87518	55279	80901	4
57	48405	87504	55317	80777	3
58	48430	87490	55355	80653	2
59	48456	87476	55393	80529	1
60	0,48481	0,87462	0,55431	1,80405	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

61°

29°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,48481	0,87462	0,55431	1,80405	60
1	48506	87448	55469	80281	59
2	48532	87434	55507	80158	58
3	48557	87420	55545	80034	57
4	48583	87406	55583	79911	56
5	0,48608	0,87391	0,55621	1,79788	55
6	48634	87377	55659	79665	54
7	48659	87363	55697	79542	53
8	48684	87349	55736	79419	52
9	48710	87335	55774	79296	51
10	0,48735	0,87321	0,55812	1,79174	50
11	48761	87306	55850	79051	49
12	48786	87292	55888	78929	48
13	48811	87278	55926	78807	47
14	48837	87264	55964	78685	46
15	0,48862	0,87250	0,56003	1,78563	45
16	48888	87235	56041	78441	44
17	48913	87221	56079	78319	43
18	48938	87207	56117	78198	42
19	48964	87193	56156	78077	41
20	0,48989	0,87178	0,56194	1,77955	40
21	49014	87164	56232	77834	39
22	49040	87150	56270	77713	38
23	49065	87136	56309	77592	37
24	49090	87121	56347	77471	36
25	0,49116	0,87107	0,56385	1,77351	35
26	49141	87093	56424	77230	34
27	49166	87079	56462	77110	33
28	49192	87064	56501	76990	32
29	49217	87050	56539	76869	31
30	0,49242	0,87036	0,56577	1,76749	30
31	49268	87021	56616	76629	29
32	49293	87007	56654	76510	28
33	49318	86993	56693	76390	27
34	49344	86978	56731	76271	26
35	0,49369	0,86964	0,56769	1,76151	25
36	49394	86949	56808	76032	24
37	49419	86935	56846	75913	23
38	49445	86921	56885	75794	22
39	49470	86906	56923	75675	21
40	0,49495	0,86892	0,56962	1,75556	20
41	49521	86878	57000	75437	19
42	49546	86863	57039	75319	18
43	49571	86849	57078	75200	17
44	49596	86834	57116	75082	16
45	0,49622	0,86820	0,57155	1,74964	15
46	49647	86805	57193	74846	14
47	49672	86791	57232	74728	13
48	49697	86777	57271	74610	12
49	49723	86762	57309	74492	11
50	0,49748	0,86748	0,57348	1,74375	10
51	49773	86733	57386	74257	9
52	49798	86719	57425	74140	8
53	49824	86704	57464	74022	7
54	49849	86690	57503	73905	6
55	0,49874	0,86675	0,57541	1,73788	5
56	49899	86661	57580	73671	4
57	49924	86646	57619	73555	3
58	49950	86632	57657	73438	2
59	49975	86617	57696	73321	1
60	0,50000	0,86603	0,57735	1,73205	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

60°

30°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,50000	0,86603	0,57735	1,73205	60
1	50025	86588	57774	73089	59
2	50050	86573	57813	72973	58
3	50076	86559	57851	72857	57
4	50101	86544	57890	72741	56
5	0,50126	0,86530	0,57929	1,72625	55
6	50151	86515	57968	72509	54
7	50176	86501	58007	72393	53
8	50201	86486	58046	72278	52
9	50227	86471	58085	72163	51
10	0,50252	0,86457	0,58124	1,72047	50
11	50277	86442	58162	71932	49
12	50302	86427	58201	71817	48
13	50327	86413	58240	71702	47
14	50352	86398	58279	71588	46
15	0,50377	0,86384	0,58318	1,71473	45
16	50403	86369	58357	71358	44
17	50428	86354	58396	71244	43
18	50453	86340	58435	71129	42
19	50478	86325	58474	71015	41
20	0,50503	0,86310	0,58513	1,70901	40
21	50528	86295	58552	70787	39
22	50553	86281	58591	70673	38
23	50578	86266	58631	70560	37
24	50603	86251	58670	70446	36
25	0,50628	0,86237	0,58709	1,70332	35
26	50654	86222	58748	70219	34
27	50679	86207	58787	70106	33
28	50704	86192	58826	69992	32
29	50729	86178	58865	69879	31
30	0,50754	0,86163	0,58905	1,69766	30
31	50779	86148	58944	69653	29
32	50804	86133	58983	69541	28
33	50829	86119	59022	69428	27
34	50854	86104	59061	69315	26
35	0,50879	0,86089	0,59101	1,69203	25
36	50904	86074	59140	69091	24
37	50929	86059	59179	68979	23
38	50954	86045	59218	68866	22
39	50979	86030	59258	68754	21
40	0,51004	0,86015	0,59297	1,68643	20
41	51029	86000	59336	68531	19
42	51054	85985	59376	68419	18
43	51079	85970	59415	68308	17
44	51104	85956	59454	68196	16
45	0,51129	0,85941	0,59494	1,68085	15
46	51154	85926	59533	67974	14
47	51179	85911	59573	67863	13
48	51204	85896	59612	67752	12
49	51229	85881	59651	67641	11
50	0,51254	0,85866	0,59691	1,67530	10
51	51279	85851	59730	67419	9
52	51304	85836	59770	67309	8
53	51329	85821	59809	67198	7
54	51354	85806	59849	67088	6
55	0,51379	0,85792	0,59888	1,66978	5
56	51404	85777	59928	66867	4
57	51429	85762	59967	66757	3
58	51454	85747	60007	66647	2
59	51479	85732	60046	66538	1
60	0,51504	0,85717	0,60086	1,66428	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

31°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,51504	0,85717	0,60086	1,66428	60
1	51529	85702	60126	66318	59
2	51554	85687	60165	66209	58
3	51579	85672	60205	66099	57
4	51604	85657	60245	65990	56
5	0,51628	0,85642	0,60284	1,65881	55
6	51653	85627	60324	65772	54
7	51678	85612	60364	65663	53
8	51703	85597	60403	65554	52
9	51728	85582	60443	65445	51
10	0,51753	0,85567	0,60483	1,65337	50
11	51778	85551	60522	65228	49
12	51803	85536	60562	65120	48
13	51828	85521	60602	65011	47
14	51852	85506	60642	64903	46
15	0,51877	0,85491	0,60681	1,64795	45
16	51902	85476	60721	64687	44
17	51927	85461	60761	64579	43
18	51952	85446	60801	64471	42
19	51977	85431	60841	64363	41
20	0,52002	0,85416	0,60881	1,64256	40
21	52026	85401	60921	64148	39
22	52051	85385	60960	64041	38
23	52076	85370	61000	63934	37
24	52101	85355	61040	63826	36
25	0,52126	0,85340	0,61080	1,63719	35
26	52151	85325	61120	63612	34
27	52175	85310	61160	63505	33
28	52200	85294	61200	63398	32
29	52225	85279	61240	63292	31
30	0,52250	0,85264	0,61280	1,63185	30
31	52275	85249	61320	63079	29
32	52299	85234	61360	62972	28
33	52324	85218	61400	62866	27
34	52349	85203	61440	62760	26
35	0,52374	0,85188	0,61480	1,62654	25
36	52399	85173	61520	62548	24
37	52423	85157	61561	62442	23
38	52448	85142	61601	62336	22
39	52473	85127	61641	62230	21
40	0,52498	0,85112	0,61681	1,62125	20
41	52522	85096	61721	62019	19
42	52547	85081	61761	61914	18
43	52572	85066	61801	61808	17
44	52597	85051	61842	61703	16
45	0,52621	0,85035	0,61882	1,61598	15
46	52646	85020	61922	61493	14
47	52671	85005	61962	61388	13
48	52696	84989	62003	61283	12
49	52720	84974	62043	61179	11
50	0,52745	0,84959	0,62083	1,61074	10
51	52770	84943	62124	60970	9
52	52794	84928	62164	60865	8
53	52819	84913	62204	60761	7
54	52844	84897	62245	60657	6
55	0,52869	0,84882	0,62285	1,60553	5
56	52893	84866	62325	60449	4
57	52918	84851	62366	60345	3
58	52943	84836	62406	60241	2
59	52967	84820	62446	60137	1
60	0,52992	0,84805	0,62487	1,60033	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

59°

58°

32°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,52992	0,84805	0,62487	1,60033	60
1	53017	84789	62527	59930	59
2	53041	84774	62568	59826	58
3	53066	84759	62608	59723	57
4	53091	84743	62649	59620	56
5	0,53115	0,84728	0,62689	1,59517	55
6	53140	84712	62730	59414	54
7	53164	84697	62770	59311	53
8	53189	84681	62811	59208	52
9	53214	84666	62852	59105	51
10	0,53238	0,84650	0,62892	1,59002	50
11	53263	84635	62933	58900	49
12	53288	84619	62973	58797	48
13	53312	84604	63014	58695	47
14	53337	84588	63055	58593	46
15	0,53361	0,84573	0,63095	1,58490	45
16	53386	84557	63136	58388	44
17	53411	84542	63177	58286	43
18	53435	84526	63217	58184	42
19	53460	84511	63258	58083	41
20	0,53484	0,84495	0,63299	1,57981	40
21	53509	84480	63340	57879	39
22	53534	84464	63380	57778	38
23	53558	84448	63421	57676	37
24	53583	84433	63462	57575	36
25	0,53607	0,84417	0,63503	1,57474	35
26	53632	84402	63544	57372	34
27	53656	84386	63584	57271	33
28	53681	84370	63625	57170	32
29	53705	84355	63666	57069	31
30	0,53730	0,84339	0,63707	1,56969	30
31	53754	84324	63748	56868	29
32	53779	84308	63789	56767	28
33	53804	84292	63830	56667	27
34	53828	84277	63871	56566	26
35	0,53853	0,84261	0,63912	1,56466	25
36	53877	84245	63953	56366	24
37	53902	84230	63994	56265	23
38	53926	84214	64035	56165	22
39	53951	84198	64076	56065	21
40	0,53975	0,84182	0,64117	1,55966	20
41	54000	84167	64158	55866	19
42	54024	84151	64199	55766	18
43	54049	84135	64240	55666	17
44	54073	84120	64281	55567	16
45	0,54097	0,84104	0,64322	1,55467	15
46	54122	84088	64363	55368	14
47	54146	84072	64404	55269	13
48	54171	84057	64446	55170	12
49	54195	84041	64487	55071	11
50	0,54220	0,84025	0,64528	1,54972	10
51	54244	84009	64569	54873	9
52	54269	83994	64610	54774	8
53	54293	83978	64652	54675	7
54	54317	83962	64693	54576	6
55	0,54342	0,83946	0,64734	1,54478	5
56	54366	83930	64775	54379	4
57	54391	83915	64817	54281	3
58	54415	83899	64858	54183	2
59	54440	83883	64899	54085	1
60	0,54464	0,83867	0,64941	1,53986	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

57°

33°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,54464	0,83867	0,64941	1,53986	60
1	54488	83851	64982	53888	59
2	54513	83835	65024	53791	58
3	54537	83819	65065	53693	57
4	54561	83804	65106	53595	56
5	0,54586	0,83788	0,65148	1,53497	55
6	54610	83772	65189	53400	54
7	54635	83756	65231	53302	53
8	54659	83740	65272	53205	52
9	54683	83724	65314	53107	51
10	0,54708	0,83708	0,65355	1,53010	50
11	54732	83692	65397	52913	49
12	54756	83676	65438	52816	48
13	54781	83660	65480	52719	47
14	54805	83645	65521	52622	46
15	0,54829	0,83629	0,65563	1,52525	45
16	54854	83613	65604	52429	44
17	54878	83597	65646	52332	43
18	54902	83581	65688	52235	42
19	54927	83565	65729	52139	41
20	0,54951	0,83549	0,65771	1,52043	40
21	54975	83533	65813	51946	39
22	54999	83517	65854	51850	38
23	55024	83501	65896	51754	37
24	55048	83485	65938	51658	36
25	0,55072	0,83469	0,65980	1,51562	35
26	55097	83453	66021	51466	34
27	55121	83437	66063	51370	33
28	55145	83421	66105	51275	32
29	55169	83405	66147	51179	31
30	0,55194	0,83389	0,66189	1,51084	30
31	55218	83373	66230	50988	29
32	55242	83356	66272	50893	28
33	55266	83340	66314	50797	27
34	55291	83324	66356	50702	26
35	0,55315	0,83308	0,66398	1,50607	25
36	55339	83292	66440	50512	24
37	55363	83276	66482	50417	23
38	55388	83260	66524	50322	22
39	55412	83244	66566	50228	21
40	0,55436	0,83228	0,66608	1,50133	20
41	55460	83212	66650	50038	19
42	55484	83195	66692	49944	18
43	55509	83179	66734	49849	17
44	55533	83163	66776	49755	16
45	0,55557	0,83147	0,66818	1,49661	15
46	55581	83131	66860	49566	14
47	55605	83115	66902	49472	13
48	55630	83098	66944	49378	12
49	55654	83082	66986	49284	11
50	0,55678	0,83066	0,67028	1,49190	10
51	55702	83050	67071	49097	9
52	55726	83034	67113	49003	8
53	55750	83017	67155	48909	7
54	55775	83001	67197	48816	6
55	0,55799	0,82985	0,67239	1,48722	5
56	55823	82969	67282	48629	4
57	55847	82953	67324	48536	3
58	55871	82936	67366	48442	2
59	55895	82920	67409	48349	1
60	0,55919	0,82904	0,67451	1,48256	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

56°

34°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,55919	0,82904	0,67451	1,48256	60
1	55943	82887	67493	48163	59
2	55968	82871	67536	48070	58
3	55992	82855	67578	47977	57
4	56016	82839	67620	47885	56
5	0,56040	0,82822	0,67663	1,47792	55
6	56064	82806	67705	47699	54
7	56088	82790	67748	47607	53
8	56112	82773	67790	47514	52
9	56136	82757	67832	47422	51
10	0,56160	0,82741	0,67875	1,47330	50
11	56184	82724	67917	47238	49
12	56208	82708	67960	47146	48
13	56232	82692	68002	47054	47
14	56256	82675	68045	46962	46
15	0,56280	0,82659	0,68088	1,46870	45
16	56305	82643	68130	46778	44
17	56329	82626	68173	46686	43
18	56353	82610	68215	46595	42
19	56377	82593	68258	46503	41
20	0,56401	0,82577	0,68301	1,46411	40
21	56425	82561	68343	46320	39
22	56449	82544	68386	46229	38
23	56473	82528	68429	46137	37
24	56497	82511	68471	46046	36
25	0,56521	0,82495	0,68514	1,45955	35
26	56545	82478	68557	45864	34
27	56569	82462	68600	45773	33
28	56593	82446	68642	45682	32
29	56617	82429	68685	45592	31
30	0,56641	0,82413	0,68728	1,45501	30
31	56665	82396	68771	45410	29
32	56689	82380	68814	45320	28
33	56713	82363	68857	45229	27
34	56736	82347	68900	45139	26
35	0,56760	0,82330	0,68942	1,45049	25
36	56784	82314	68985	44958	24
37	56808	82297	69028	44868	23
38	56832	82281	69071	44778	22
39	56856	82264	69114	44688	21
40	0,56880	0,82248	0,69157	1,44598	20
41	56904	82231	69200	44508	19
42	56928	82214	69243	44418	18
43	56952	82198	69286	44329	17
44	56976	82181	69329	44239	16
45	0,57000	0,82165	0,69372	1,44149	15
46	57024	82148	69416	44060	14
47	57047	82132	69459	43970	13
48	57071	82115	69502	43881	12
49	57095	82098	69545	43792	11
50	0,57119	0,82082	0,69588	1,43703	10
51	57143	82065	69631	43614	9
52	57167	82048	69675	43525	8
53	57191	82032	69718	43436	7
54	57215	82015	69761	43347	6
55	0,57238	0,81999	0,69804	1,43258	5
56	57262	81982	69847	43169	4
57	57286	81965	69891	43080	3
58	57310	81949	69934	42992	2
59	57334	81932	69977	42903	1
60	0,57358	0,81915	0,70021	1,42815	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

35°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,57358	0,81915	0,70021	1,42815	60
1	57381	81899	70064	42726	59
2	57405	81882	70107	42638	58
3	57429	81865	70151	42550	57
4	57453	81848	70194	42462	56
5	0,57477	0,81832	0,70238	1,42374	55
6	57501	81815	70281	42286	54
7	57524	81798	70325	42198	53
8	57548	81782	70368	42110	52
9	57572	81765	70412	42022	51
10	0,57596	0,81748	0,70455	1,41934	50
11	57619	81731	70499	41847	49
12	57643	81714	70542	41759	48
13	57667	81698	70586	41672	47
14	57691	81681	70629	41584	46
15	0,57715	0,81664	0,70673	1,41497	45
16	57738	81647	70717	41409	44
17	57762	81631	70760	41322	43
18	57786	81614	70804	41235	42
19	57810	81597	70848	41148	41
20	0,57833	0,81580	0,70891	1,41061	40
21	57857	81563	70935	40974	39
22	57881	81546	70979	40887	38
23	57904	81530	71023	40800	37
24	57928	81513	71066	40714	36
25	0,57952	0,81496	0,71110	1,40627	35
26	57976	81479	71154	40540	34
27	57999	81462	71198	40454	33
28	58023	81445	71242	40367	32
29	58047	81428	71285	40281	31
30	0,58070	0,81412	0,71329	1,40195	30
31	58094	81395	71373	40109	29
32	58118	81378	71417	40022	28
33	58141	81361	71461	39936	27
34	58165	81344	71505	39850	26
35	0,58189	0,81327	0,71549	1,39764	25
36	58212	81310	71593	39679	24
37	58236	81293	71637	39593	23
38	58260	81276	71681	39507	22
39	58283	81259	71725	39421	21
40	0,58307	0,81242	0,71769	1,39336	20
41	58330	81225	71813	39250	19
42	58354	81208	71857	39165	18
43	58378	81191	71901	39079	17
44	58401	81174	71946	38994	16
45	0,58425	0,81157	0,71990	1,38909	15
46	58449	81140	72034	38824	14
47	58472	81123	72078	38738	13
48	58496	81106	72122	38653	12
49	58519	81089	72167	38568	11
50	0,58543	0,81072	0,72211	1,38484	10
51	58567	81055	72255	38399	9
52	58590	81038	72299	38314	8
53	58614	81021	72344	38229	7
54	58637	81004	72388	38145	6
55	0,58661	0,80987	0,72432	1,38060	5
56	58684	80970	72477	37976	4
57	58708	80953	72521	37891	3
58	58731	80936	72565	37807	2
59	58755	80919	72610	37722	1
60	0,58779	0,80902	0,72654	1,37638	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

55°

54°

36°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,58779	0,80902	0,72654	1,37638	60
1	58802	80885	72699	37554	59
2	58826	80867	72743	37470	58
3	58849	80850	72788	37386	57
4	58873	80833	72832	37302	56
5	0,58896	0,80816	0,72877	1,37218	55
6	58920	80799	72921	37134	54
7	58943	80782	72966	37050	53
8	58967	80765	73010	36967	52
9	58990	80748	73055	36883	51
10	0,59014	0,80730	0,73100	1,36800	50
11	59037	80713	73144	36716	49
12	59061	80696	73189	36633	48
13	59084	80679	73234	36549	47
14	59108	80662	73278	36466	46
15	0,59131	0,80644	0,73323	1,36383	45
16	59154	80627	73368	36300	44
17	59178	80610	73413	36217	43
18	59201	80593	73457	36134	42
19	59225	80576	73502	36051	41
20	0,59248	0,80558	0,73547	1,35968	40
21	59272	80541	73592	35885	39
22	59295	80524	73637	35802	38
23	59318	80507	73681	35719	37
24	59342	80489	73726	35637	36
25	0,59365	0,80472	0,73771	1,35554	35
26	59389	80455	73816	35472	34
27	59412	80438	73861	35389	33
28	59436	80420	73906	35307	32
29	59459	80403	73951	35224	31
30	0,59482	0,80386	0,73996	1,35142	30
31	59506	80368	74041	35060	29
32	59529	80351	74086	34978	28
33	59552	80334	74131	34896	27
34	59576	80316	74176	34814	26
35	0,59599	0,80299	0,74221	1,34732	25
36	59622	80282	74267	34650	24
37	59646	80264	74312	34568	23
38	59669	80247	74357	34487	22
39	59693	80230	74402	34405	21
40	0,59716	0,80212	0,74447	1,34323	20
41	59739	80195	74492	34242	19
42	59763	80178	74538	34160	18
43	59786	80160	74583	34079	17
44	59809	80143	74628	33998	16
45	0,59832	0,80125	0,74674	1,33916	15
46	59856	80108	74719	33835	14
47	59879	80091	74764	33754	13
48	59902	80073	74810	33673	12
49	59926	80056	74855	33592	11
50	0,59949	0,80038	0,74900	1,33511	10
51	59972	80021	74946	33430	9
52	59995	80003	74991	33349	8
53	60019	79986	75037	33268	7
54	60042	79968	75082	33187	6
55	0,60065	0,79951	0,75128	1,33107	5
56	60089	79934	75173	33026	4
57	60112	79916	75219	32946	3
58	60135	79899	75264	32865	2
59	60158	79881	75310	32785	1
60	0,60182	0,79864	0,75355	1,32704	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

53°

37°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,60182	0,79864	0,75355	1,32704	60
1	60205	79846	75401	32624	59
2	60228	79829	75447	32544	58
3	60251	79811	75492	32464	57
4	60274	79793	75538	32384	56
5	0,60298	0,79776	0,75584	1,32304	55
6	60321	79758	75629	32224	54
7	60344	79741	75675	32144	53
8	60367	79723	75721	32064	52
9	60390	79706	75767	31984	51
10	0,60414	0,79688	0,75812	1,31904	50
11	60437	79671	75858	31825	49
12	60460	79653	75904	31745	48
13	60483	79635	75950	31666	47
14	60506	79618	75996	31586	46
15	0,60529	0,79600	0,76042	1,31507	45
16	60553	79583	76088	31427	44
17	60576	79565	76134	31348	43
18	60599	79547	76180	31269	42
19	60622	79530	76226	31190	41
20	0,60645	0,79512	0,76272	1,31110	40
21	60668	79494	76318	31031	39
22	60691	79477	76364	30952	38
23	60714	79459	76410	30873	37
24	60738	79441	76456	30795	36
25	0,60761	0,79424	0,76502	1,30716	35
26	60784	79406	76548	30637	34
27	60807	79388	76594	30558	33
28	60830	79371	76640	30480	32
29	60853	79353	76686	30401	31
30	0,60876	0,79335	0,76733	1,30323	30
31	60899	79318	76779	30244	29
32	60922	79300	76825	30166	28
33	60945	79282	76871	30087	27
34	60968	79264	76918	30009	26
35	0,60991	0,79247	0,76964	1,29931	25
36	61015	79229	77010	29853	24
37	61038	79211	77057	29775	23
38	61061	79193	77103	29696	22
39	61084	79176	77149	29618	21
40	0,61107	0,79158	0,77196	1,29541	20
41	61130	79140	77242	29463	19
42	61153	79122	77289	29385	18
43	61176	79105	77335	29307	17
44	61199	79087	77382	29229	16
45	0,61222	0,79069	0,77428	1,29152	15
46	61245	79051	77475	29074	14
47	61268	79033	77521	28997	13
48	61291	79016	77568	28919	12
49	61314	78998	77615	28842	11
50	0,61337	0,78980	0,77661	1,28764	10
51	61360	78962	77708	28687	9
52	61383	78944	77754	28610	8
53	61406	78926	77801	28533	7
54	61429	78908	77848	28456	6
55	0,61451	0,78891	0,77895	1,28379	5
56	61474	78873	77941	28302	4
57	61497	78855	77988	28225	3
58	61520	78837	78035	28148	2
59	61543	78819	78082	28071	1
60	0,61566	0,78801	0,78129	1,27994	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

52°

38°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,61566	0,78801	0,78129	1,27994	60
1	61589	78783	78175	27917	59
2	61612	78765	78222	27841	58
3	61635	78747	78269	27764	57
4	61658	78729	78316	27688	56
5	0,61681	0,78711	0,78363	1,27611	55
6	61704	78694	78410	27535	54
7	61726	78676	78457	27458	53
8	61749	78658	78504	27382	52
9	61772	78640	78551	27306	51
10	0,61795	0,78622	0,78598	1,27230	50
11	61818	78604	78645	27153	49
12	61841	78586	78692	27077	48
13	61864	78568	78739	27001	47
14	61887	78550	78786	26925	46
15	0,61909	0,78532	0,78834	1,26849	45
16	61932	78514	78881	26774	44
17	61955	78496	78928	26698	43
18	61978	78478	78975	26622	42
19	62001	78460	79022	26546	41
20	0,62024	0,78442	0,79070	1,26471	40
21	62046	78424	79117	26395	39
22	62069	78405	79164	26319	38
23	62092	78387	79212	26244	37
24	62115	78369	79259	26169	36
25	0,62138	0,78351	0,79306	1,26093	35
26	62160	78333	79354	26018	34
27	62183	78315	79401	25943	33
28	62206	78297	79449	25867	32
29	62229	78279	79496	25792	31
30	0,62251	0,78261	0,79544	1,25717	30
31	62274	78243	79591	25642	29
32	62297	78225	79639	25567	28
33	62320	78206	79686	25492	27
34	62342	78188	79734	25417	26
35	0,62365	0,78170	0,79781	1,25343	25
36	62388	78152	79829	25268	24
37	62411	78134	79877	25193	23
38	62433	78116	79924	25118	22
39	62456	78098	79972	25044	21
40	0,62479	0,78079	0,80020	1,24969	20
41	62502	78061	80067	24895	19
42	62524	78043	80115	24820	18
43	62547	78025	80163	24746	17
44	62570	78007	80211	24672	16
45	0,62592	0,77988	0,80258	1,24597	15
46	62615	77970	80306	24523	14
47	62638	77952	80354	24449	13
48	62660	77934	80402	24375	12
49	62683	77916	80450	24301	11
50	0,62706	0,77897	0,80498	1,24227	10
51	62728	77879	80546	24153	9
52	62751	77861	80594	24079	8
53	62774	77843	80642	24005	7
54	62796	77824	80690	23931	6
55	0,62819	0,77806	0,80738	1,23858	5
56	62842	77788	80786	23784	4
57	62864	77769	80834	23710	3
58	62887	77751	80882	23637	2
59	62909	77733	80930	23563	1
60	0,62932	0,77715	0,80978	1,23490	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

51°

39°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,62932	0,77715	0,80978	1,23490	60
1	62955	77696	81027	23416	59
2	62977	77678	81075	23343	58
3	63000	77660	81123	23270	57
4	63022	77641	81171	23196	56
5	0,63045	0,77623	0,81220	1,23123	55
6	63068	77605	81268	23050	54
7	63090	77586	81316	22977	53
8	63113	77568	81364	22904	52
9	63135	77550	81413	22831	51
10	0,63158	0,77531	0,81461	1,22758	50
11	63180	77513	81510	22685	49
12	63203	77494	81558	22612	48
13	63225	77476	81606	22539	47
14	63248	77458	81655	22467	46
15	0,63271	0,77439	0,81703	1,22394	45
16	63293	77421	81752	22321	44
17	63316	77402	81800	22249	43
18	63338	77384	81849	22176	42
19	63361	77366	81898	22104	41
20	0,63383	0,77347	0,81946	1,22031	40
21	63406	77329	81995	21959	39
22	63428	77310	82044	21886	38
23	63451	77292	82092	21814	37
24	63473	77273	82141	21742	36
25	0,63496	0,77255	0,82190	1,21670	35
26	63518	77236	82238	21598	34
27	63540	77218	82287	21526	33
28	63563	77199	82336	21454	32
29	63585	77181	82385	21382	31
30	0,63608	0,77162	0,82434	1,21310	30
31	63630	77144	82483	21238	29
32	63653	77125	82531	21166	28
33	63675	77107	82580	21094	27
34	63698	77088	82629	21023	26
35	0,63720	0,77070	0,82678	1,20951	25
36	63742	77051	82727	20879	24
37	63765	77033	82776	20808	23
38	63787	77014	82825	20736	22
39	63810	76996	82874	20665	21
40	0,63832	0,76977	0,82923	1,20593	20
41	63854	76959	82972	20522	19
42	63877	76940	83022	20451	18
43	63899	76921	83071	20379	17
44	63922	76903	83120	20308	16
45	0,63944	0,76884	0,83169	1,20237	15
46	63966	76866	83218	20166	14
47	63989	76847	83268	20095	13
48	64011	76828	83317	20024	12
49	64033	76810	83366	19953	11
50	0,64056	0,76791	0,83415	1,19882	10
51	64078	76772	83465	19811	9
52	64100	76754	83514	19740	8
53	64123	76735	83564	19669	7
54	64145	76717	83613	19599	6
55	0,64167	0,76698	0,83662	1,19528	5
56	64190	76679	83712	19457	4
57	64212	76661	83761	19387	3
58	64234	76642	83811	19316	2
59	64256	76623	83860	19246	1
60	0,64279	0,76604	0,83910	1,19175	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

50°

40°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,64279	0,76604	0,83910	1,19175	60
1	64301	76586	83960	19105	59
2	64323	76567	84009	19035	58
3	64346	76548	84059	18964	57
4	64368	76530	84108	18894	56
5	0,64390	0,76511	0,84158	1,18824	55
6	64412	76492	84208	18754	54
7	64435	76473	84258	18684	53
8	64457	76455	84307	18614	52
9	64479	76436	84357	18544	51
10	0,64501	0,76417	0,84407	1,18474	50
11	64524	76398	84457	18404	49
12	64546	76380	84507	18334	48
13	64568	76361	84556	18264	47
14	64590	76342	84606	18194	46
15	0,64612	0,76323	0,84656	1,18125	45
16	64635	76304	84706	18055	44
17	64657	76286	84756	17986	43
18	64679	76267	84806	17916	42
19	64701	76248	84856	17846	41
20	0,64723	0,76229	0,84906	1,17777	40
21	64746	76210	84956	17708	39
22	64768	76192	85006	17638	38
23	64790	76173	85057	17569	37
24	64812	76154	85107	17500	36
25	0,64834	0,76135	0,85157	1,17430	35
26	64856	76116	85207	17361	34
27	64878	76097	85257	17292	33
28	64901	76078	85308	17223	32
29	64923	76059	85358	17154	31
30	0,64945	0,76041	0,85408	1,17085	30
31	64967	76022	85458	17016	29
32	64989	76003	85509	16947	28
33	65011	75984	85559	16878	27
34	65033	75965	85609	16809	26
35	0,65055	0,75946	0,85660	1,16741	25
36	65077	75927	85710	16672	24
37	65100	75908	85761	16603	23
38	65122	75889	85811	16535	22
39	65144	75870	85862	16466	21
40	0,65166	0,75851	0,85912	1,16398	20
41	65188	75832	85963	16329	19
42	65210	75813	86014	16261	18
43	65232	75794	86064	16192	17
44	65254	75775	86115	16124	16
45	0,65276	0,75756	0,86166	1,16056	15
46	65298	75738	86216	15987	14
47	65320	75719	86267	15919	13
48	65342	75700	86318	15851	12
49	65364	75680	86368	15783	11
50	0,65386	0,75661	0,86419	1,15715	10
51	65408	75642	86470	15647	9
52	65430	75623	86521	15579	8
53	65452	75604	86572	15511	7
54	65474	75585	86623	15443	6
55	0,65496	0,75566	0,86674	1,15375	5
56	65518	75547	86725	15308	4
57	65540	75528	86776	15240	3
58	65562	75509	86827	15172	2
59	65584	75490	86878	15104	1
60	0,65606	0,75471	0,86929	1,15037	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

41°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,65606	0,75471	0,86929	1,15037	60
1	65628	75452	86980	14969	59
2	65650	75433	87031	14902	58
3	65672	75414	87082	14834	57
4	65694	75395	87133	14767	56
5	0,65716	0,75375	0,87184	1,14699	55
6	65738	75356	87236	14632	54
7	65759	75337	87287	14565	53
8	65781	75318	87338	14498	52
9	65803	75299	87389	14430	51
10	0,65825	0,75280	0,87441	1,14363	50
11	65847	75261	87492	14296	49
12	65869	75241	87543	14229	48
13	65891	75222	87595	14162	47
14	65913	75203	87646	14095	46
15	0,65935	0,75184	0,87698	1,14028	45
16	65956	75165	87749	13961	44
17	65978	75146	87801	13894	43
18	66000	75126	87852	13828	42
19	66022	75107	87904	13761	41
20	0,66044	0,75088	0,87955	1,13694	40
21	66066	75069	88007	13627	39
22	66088	75050	88059	13561	38
23	66109	75030	88110	13494	37
24	66131	75011	88162	13428	36
25	0,66153	0,74992	0,88214	1,13361	35
26	66175	74973	88265	13295	34
27	66197	74953	88317	13228	33
28	66218	74934	88369	13162	32
29	66240	74915	88421	13096	31
30	0,66262	0,74896	0,88473	1,13029	30
31	66284	74876	88524	12963	29
32	66306	74857	88576	12897	28
33	66327	74838	88628	12831	27
34	66349	74818	88680	12765	26
35	0,66371	0,74799	0,88732	1,12699	25
36	66393	74780	88784	12633	24
37	66414	74760	88836	12567	23
38	66436	74741	88888	12501	22
39	66458	74722	88940	12435	21
40	0,66480	0,74703	0,88992	1,12369	20
41	66501	74683	89045	12303	19
42	66523	74664	89097	12238	18
43	66545	74644	89149	12172	17
44	66566	74625	89201	12106	16
45	0,66588	0,74606	0,89253	1,12041	15
46	66610	74586	89306	11975	14
47	66632	74567	89358	11909	13
48	66653	74548	89410	11844	12
49	66675	74528	89463	11778	11
50	0,66697	0,74509	0,89515	1,11713	10
51	66718	74489	89567	11648	9
52	66740	74470	89620	11582	8
53	66762	74451	89672	11517	7
54	66783	74431	89725	11452	6
55	0,66805	0,74412	0,89777	1,11387	5
56	66827	74392	89830	11321	4
57	66848	74373	89883	11256	3
58	66870	74353	89935	11191	2
59	66891	74334	89988	11126	1
60	0,66913	0,74314	0,90040	1,11061	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

49°

48°

42°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,66913	0,74314	0,90040	1,11061	60
1	66935	74295	90093	10996	59
2	66956	74276	90146	10931	58
3	66978	74256	90199	10867	57
4	66999	74237	90251	10802	56
5	0,67021	0,74217	0,90304	1,10737	55
6	67043	74198	90357	10672	54
7	67064	74178	90410	10608	53
8	67086	74159	90463	10543	52
9	67107	74139	90516	10478	51
10	0,67129	0,74120	0,90569	1,10414	50
11	67151	74100	90621	10349	49
12	67172	74080	90674	10285	48
13	67194	74061	90727	10220	47
14	67215	74041	90781	10156	46
15	0,67237	0,74022	0,90834	1,10091	45
16	67258	74002	90887	10027	44
17	67280	73983	90940	09963	43
18	67301	73963	90993	09899	42
19	67323	73944	91046	09834	41
20	0,67344	0,73924	0,91099	1,09770	40
21	67366	73904	91153	09706	39
22	67387	73885	91206	09642	38
23	67409	73865	91259	09578	37
24	67430	73846	91313	09514	36
25	0,67452	0,73826	0,91366	1,09450	35
26	67473	73806	91419	09386	34
27	67495	73787	91473	09322	33
28	67516	73767	91526	09258	32
29	67538	73747	91580	09195	31
30	0,67559	0,73728	0,91633	1,09131	30
31	67580	73708	91687	09067	29
32	67602	73688	91740	09003	28
33	67623	73669	91794	08940	27
34	67645	73649	91847	08876	26
35	0,67666	0,73629	0,91901	1,08813	25
36	67688	73610	91955	08749	24
37	67709	73590	92008	08686	23
38	67730	73570	92062	08622	22
39	67752	73551	92116	08559	21
40	0,67773	0,73531	0,92170	1,08496	20
41	67795	73511	92224	08432	19
42	67816	73491	92277	08369	18
43	67837	73472	92331	08306	17
44	67859	73452	92385	08243	16
45	0,67880	0,73432	0,92439	1,08179	15
46	67901	73413	92493	08116	14
47	67923	73393	92547	08053	13
48	67944	73373	92601	07990	12
49	67965	73353	92655	07927	11
50	0,67987	0,73333	0,92709	1,07864	10
51	68008	73314	92763	07801	9
52	68029	73294	92817	07738	8
53	68051	73274	92872	07676	7
54	68072	73254	92926	07613	6
55	0,68093	0,73234	0,92980	1,07550	5
56	68115	73215	93034	07487	4
57	68136	73195	93088	07425	3
58	68157	73175	93143	07362	2
59	68179	73155	93197	07299	1
60	0,68200	0,73135	0,93252	1,07237	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

43°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,68200	0,73135	0,93252	1,07237	60
1	68221	73116	93306	07174	59
2	68242	73096	93360	07112	58
3	68264	73076	93415	07049	57
4	68285	73056	93469	06987	56
5	0,68306	0,73036	0,93524	1,06925	55
6	68327	73016	93578	06862	54
7	68349	72996	93633	06800	53
8	68370	72976	93688	06738	52
9	68391	72957	93742	06676	51
10	0,68412	0,72937	0,93797	1,06613	50
11	68434	72917	93852	06551	49
12	68455	72897	93906	06489	48
13	68476	72877	93961	06427	47
14	68497	72857	94016	06365	46
15	0,68518	0,72837	0,94071	1,06303	45
16	68539	72817	94125	06241	44
17	68561	72797	94180	06179	43
18	68582	72777	94235	06117	42
19	68603	72757	94290	06056	41
20	0,68624	0,72737	0,94345	1,05994	40
21	68645	72717	94400	05932	39
22	68666	72697	94455	05870	38
23	68688	72677	94510	05809	37
24	68709	72657	94565	05747	36
25	0,68730	0,72637	0,94620	1,05685	35
26	68751	72617	94676	05624	34
27	68772	72597	94731	05562	33
28	68793	72577	94786	05501	32
29	68814	72557	94841	05439	31
30	0,68835	0,72537	0,94896	1,05378	30
31	68857	72517	94952	05317	29
32	68878	72497	95007	05255	28
33	68899	72477	95062	05194	27
34	68920	72457	95118	05133	26
35	0,68941	0,72437	0,95173	1,05072	25
36	68962	72417	95229	05010	24
37	68983	72397	95284	04949	23
38	69004	72377	95340	04888	22
39	69025	72357	95395	04827	21
40	0,69046	0,72337	0,95451	1,04766	20
41	69067	72317	95506	04705	19
42	69088	72297	95562	04644	18
43	69109	72277	95618	04583	17
44	69130	72257	95673	04522	16
45	0,69151	0,72236	0,95729	1,04461	15
46	69172	72216	95785	04401	14
47	69193	72196	95841	04340	13
48	69214	72176	95897	04279	12
49	69235	72156	95952	04218	11
50	0,69256	0,72136	0,96008	1,04158	10
51	69277	72116	96064	04097	9
52	69298	72095	96120	04036	8
53	69319	72075	96176	03976	7
54	69340	72055	96232	03915	6
55	0,69361	0,72035	0,96288	1,03855	5
56	69382	72015	96344	03794	4
57	69403	71995	96400	03734	3
58	69424	71974	96457	03674	2
59	69445	71954	96513	03613	1
60	0,69466	0,71934	0,96569	1,03553	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

47°

46°

44°

′	Seno	Coseno	Tang	Cotang	′
0	0,69466	0,71934	0,96569	1,03553	60
1	69487	71914	96625	03493	59
2	69508	71894	96681	03433	58
3	69529	71873	96738	03372	57
4	69549	71853	96794	03312	56
5	0,69570	0,71833	0,96850	1,03252	55
6	69591	71813	96907	03192	54
7	69612	71792	96963	03132	53
8	69633	71772	97020	03072	52
9	69654	71752	97076	03012	51
10	0,69675	0,71732	0,97133	1,02952	50
11	69696	71711	97189	02892	49
12	69717	71691	97246	02832	48
13	69737	71671	97302	02772	47
14	69758	71650	97359	02713	46
15	0,69779	0,71630	0,97416	1,02653	45
16	69800	71610	97472	02593	44
17	69821	71590	97529	02533	43
18	69842	71569	97586	02474	42
19	69862	71549	97643	02414	41
20	0,69883	0,71529	0,97700	1,02355	40
21	69904	71508	97756	02295	39
22	69925	71488	97813	02236	38
23	69946	71468	97870	02176	37
24	69966	71447	97927	02117	36
25	0,69987	0,71427	0,97984	1,02057	35
26	70008	71407	98041	01998	34
27	70029	71386	98098	01939	33
28	70049	71366	98155	01879	32
29	70070	71345	98213	01820	31
30	0,70091	0,71325	0,98270	1,01761	30
31	70112	71305	98327	01702	29
32	70132	71284	98384	01642	28
33	70153	71264	98441	01583	27
34	70174	71243	98499	01524	26
35	0,70195	0,71223	0,98556	1,01465	25
36	70215	71203	98613	01406	24
37	70236	71182	98671	01347	23
38	70257	71162	98728	01288	22
39	70277	71141	98786	01229	21
40	0,70298	0,71121	0,98843	1,01170	20
41	70319	71100	98901	01112	19
42	70339	71080	98958	01053	18
43	70360	71059	99016	00994	17
44	70381	71039	99073	00935	16
45	0,70401	0,71019	0,99131	1,00876	15
46	70422	70998	99189	00818	14
47	70443	70978	99247	00759	13
48	70463	70957	99304	00701	12
49	70484	70937	99362	00642	11
50	0,70505	0,70916	0,99420	1,00583	10
51	70525	70896	99478	00525	9
52	70546	70875	99536	00467	8
53	70567	70855	99594	00408	7
54	70587	70834	99652	00350	6
55	0,70608	0,70813	0,99710	1,00291	5
56	70628	70793	99768	00233	4
57	70649	70772	99826	00175	3
58	70670	70752	99884	00116	2
59	70690	70731	99942	00058	1
60	0,70711	0,70711	1,00000	1,00000	0
′	Coseno	Seno	Cotang	Tang	′

45°